MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 5. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 25. MÄRZ 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

Preis DMark 26.80

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**
erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Haupt, Prof. Dr. O., Erlangen, Spardorferstr. 45: Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens 527

Schmidt, Prof. Dr. H., Braunschweig, Math. Institut der Technischen Hochschule: Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen 547

Specht, Dr. W., Erlangen, Nürnbergerstr. 77: Gesetze in Ringen. I. 557

Tietze, Prof. Dr., München 23, Trautenwolfstr. 7/II: Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche 590

Sansone, Prof. Giovanni, Università degli Studi di Firenze, Firenze (Italia) Via Francesco Crispi 6: Due semplici limitazioni nel campo complesso delle funzioni associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite e del termine complementare della loro rappresentazione asintotica 593

Nevanlinna, Prof. Dr. R., Finnlands Akademie, Helsinki (Finnland) Hallitusk 1: Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht 599

Lense, Prof. Dr. J., München 23, Herzogstr. 62/II: Bestimmung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch sieben Paare entsprechender Punkte 605

Sauer, Prof. Dr. R., München 19, Romanstr. 34: Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen 611

Bompiani, Prof. Dr. E., Roma (Italien), Via Verona 22: Über das Theorem von F. Schur in der Riemannschen Geometrie 623

Köthe, Prof. Dr. G., Mainz, Mathematisches Institut der Universität: Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume 627

Szasz, Prof. Dr. O., National Bureau of Standards, Institute for numerical analysis, 405 Hilgard Avenue Los Angeles 24 (Californien) USA: On a summation method of O. Perron 631

Nöbeling, Prof. Dr. G., Erlangen, Lammersstr. 5: Über die Schnittpunkte zweier stetiger ebener Kurven endlicher Länge in allgemeiner Lage 637

Wielandt, Prof. Dr. H., Mainz, Göttelmannstr. $2^5/_{10}$: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen 642

van der Waerden, Prof. Dr. B. L., Laren (Nord Holland), Verlengde Engweg 10: Über Landau's Beweis des Primzahlsatzes 649

Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

Einleitung.

Bei einer früheren Untersuchung[1]) über die ordnungsfeste Erweiterbarkeit ebener Bogen $\mathfrak{B}$ war unter anderem die Betrachtung der Relativordnung $O(X; \mathfrak{B})$ eines beliebigen Punktes X der Ebene bezüglich $\mathfrak{B}$ erforderlich. Bei Untersuchung der Werteverteilung von $O(X; \mathfrak{B})$ als Funktion von X war aber seinerzeit eine einschränkende Annahme gemacht worden[2]); diese soll im folgenden beseitigt werden. Gleichzeitig soll die ganze Untersuchung verallgemeinert werden für den Fall der (eindeutigen stetigen Streckenbilder, kurz) Bogen von beschränktem starken *Stellen*ordnungswert im projektiven R_n (mit $n \geqq 2$). Außerdem werden wir für den speziellen Fall der ebenen Bogen, welche sich als Vereinigungen von endlich vielen Konvexbogen darstellen lassen, zeigen (Nr. 3. 5.): Die (in Nr. 3. 4.) als konvex nachgewiesenen Komponenten der Menge aller nicht normalen Punkte mit $O(X; \mathfrak{B}) \geqq t$, sind sogar Polygone. Anwendungen auf das Problem der ordnungsfesten Erweiterung (Nr. 4. 1. und 4. 2.) sowie die Konstruktion von Beispielen, durch welche verschiedene der eingeführten Begriffe erläutert werden, beschließen (Nr. 5. 1. ff.) die Darlegungen.

Rückgriffe auf die frühere Arbeit werden nicht gemacht; ihr gegenüber sind einzelne Begriffsbildungen modifiziert (vgl. Nr. 1. 3.), wodurch, wie uns scheint, die Darstellung übersichtlicher wird. Auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten, wie z. B. die Ersetzung der Hyperebenen durch allgemeinere Ordnungscharakteristiken, sei nur hingewiesen.

---

[1]) Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven, Math. Zeitschr. 39 (1935), 126 ff. und 777.

[2]) Vgl. a. a. O.[1]), 777.

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen.

1.1. Es sei R_n der projektive n-dimensionale Raum[3]) ($n \geqq 2$). Ferner sei $\mathfrak{C}^*$ eindeutiges stetiges Bild[4]) einer abgeschlossenen Strecke im R_n. Weiter sei $\mathfrak{C}^*$ von beschränktem, *starkem* Stellenordnungswert $k \geqq 1$ bezüglich der Hyperebenen des R_n, d. h. auf *jeder* Hyperebene sollen je nur höchstens k Stellen von $\mathfrak{C}^*$ liegen und auf (mindestens) einer Hyperebene auch (genau) k Stellen von $\mathfrak{C}^*$[5]). Unter einer (t-)Sekante von $\mathfrak{C}^*$ verstehen wir jede Hyperebene $\mathfrak{H}$, welche *nur Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat[6]) (und zwar genau $t \geqq 1$).

Als (*Stellen*-)Index von $\mathfrak{C}^*$ werde die *Minimal*zahl von Schnittstellen bezeichnet, die eine Sekante mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat. Es heiße

---

[3]) Der R_n ist darstellbar als Kompaktum, d. h. als metrischer kompakter Raum. Die m-dimensionalen linearen Teilräume des R_n heißen m-Ebenen, für $m = n-1$ speziell Hyperebenen. Die Gesamtheit $R_{n-1}^{(n)}$ der Hyperebenen des R_n ist ebenfalls darstellbar als Kompaktum. — Die leere Menge wird stets mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet.

[4]) Die Punkte von $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}^*(u)$ sind also eindeutige stetige Funktionen $Z^* = Z^*(u)$ von u, etwa mit $0 \leqq u \leqq 1$. Als Bild von u betrachtet heiße Z^* die zu u gehörige Stelle von $\mathfrak{C}^*$; zu verschiedenen u gehörige Stellen gelten als verschieden, auch wenn sie in den gleichen Punkt von R_n fallen. Das Bild $\mathfrak{W}^*$ einer Umgebung $\mathfrak{W}$ von u' in $[0,1]$ heiße eine Umgebung von $Z^*(u')$ in $\mathfrak{C}^*$ oder auf $\mathfrak{C}^*$. Der Punkt $Z = Z(u)$, in welchen die Stelle $Z^* = Z^*(u)$ fällt, heiße der Träger von Z^*. Die Menge der Trägerpunkte aller Stellen von $\mathfrak{C}^*$ heiße der Träger $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}^*$. Die Stellen $Z^*(0)$ und $Z^*(1)$ heißen Endstellen von $\mathfrak{C}^*$, alle anderen Stellen heißen innere Stellen von $\mathfrak{C}^*$. Es werde $\mathfrak{C}^*$ auch kurz als Bogen bezeichnet, speziell als Kurve, wenn hervorgehoben werden soll, daß die beiden Endstellen den gleichen Träger besitzen (daß also $\mathfrak{C}^*$ Bild der Kreisperipherie ist). Vgl. auch Chr. Pauc, Les méthodes directes, Pariser Thèse (Paris, Herman et Cie 1941, 84/85).

[5]) D. h. es soll höchstens k Stellen geben (und auch wirklich k Stellen), deren zugehörige Trägerpunkte in einer Hyperebene liegen. Es enthält also insbesondere $\mathfrak{C}^*$ keinen in einer Hyperebene gelegenen Teilbogen. Liegt die *innere* Stelle $P^*(u')$ von $\mathfrak{C}^*$ in der Hyperebene $\mathfrak{H}$, so heiße $P^*(u')$ Schnitt- oder Stützstelle, je nachdem eine euklidische Umgebung $\mathfrak{U}$ des Trägerpunktes $P(u')$ von $P^*(u')$ im R_n existiert, derart, daß eine Umgebung von $P^*(u')$ auf $\mathfrak{C}^*$ mit den beiden, durch $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}$ bestimmten offenen Halbräumen Punkte gemeinsam hat oder nur mit dem einen von ihnen; es heiße dann $\mathfrak{H}$ auch Schnitt- bzw. Stütz*hyperebene* von $\mathfrak{C}^*$. Der Träger $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}^*$ ist von beschränktem, starken *Punkt*ordnungswert $\leqq k$.

[6]) Gemäß dem sogen. Reduktionssatz (vgl. A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), 79, sowie Haupt, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933), 18 ff.) existieren in beliebiger Nähe jeder Hyperebene (im $R_{n-1}^{(n)}$), welche insgesamt r Stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat, ϱ-Sekanten mit $r \leqq \varrho$. Für Ordnungsbetrachtungen bedingt also die Beschränkung auf Sekanten keine Einbuße an Allgemeinheit.

$\mathfrak{C}^*$ vom (*Stellen-*)Index Null, wenn $\mathfrak{C}$ fremd ist zu (mindestens) einer Hyperebene, also, was damit gleichbedeutend, projektiv äquivalent zu einer beschränkten Menge in einem affinen Raum.

Ein Punkt $X \in R_n$ heiße *q-Punkt* $(q \geqq 1)$ bezüglich $\mathfrak{C}^*$ oder Punkt des (Relativstellen-)Ordnungswertes $q = O(X; \mathfrak{C}^*)$ *bezüglich* $\mathfrak{C}^*$, wenn X auf (mindestens) einer *q-Sekante* liegt, aber auf keiner p-Sekante mit $q < p$.

Ein *innerer* Punkt P der Menge $\mathfrak{P}$ aller Punkte, die τ-Punkte sind für irgend ein $\tau = 1, \ldots, k$, heiße gewöhnlicher Punkt (bezüglich $\mathfrak{C}^*$), wenn sein Ordnungswert gleich ist dem Minimum der Ordnungswerte der Punkte einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P im R_n, wenn also $O(P; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Y; \mathfrak{C}^*)$ für $Y \in \mathfrak{U}$; die gewöhnlichen Punkte sind mithin diejenigen inneren Punkte von $\mathfrak{P}$, in welchen die „Ordnungsfunktion" $O(X; \mathfrak{C}^*)$ unterhalb stetig ist. Jeder *innere* Punkt der *Menge* $\mathfrak{G}$ *aller gewöhnlichen* Punkte heiße normal.

Es werde bezeichnet: (α) Mit $\mathfrak{N}(t)$ die Menge aller *normalen* Punkte von *mindestens* dem Ordnungswert t, wobei $1 \leqq t \leqq k$; speziell ist dann $\mathfrak{N}(1)$ gleich der *Menge* $\mathfrak{G}$ aller *normalen Punkte* überhaupt. (β) Mit $\mathfrak{Q}(t)$ das Komplement $(\mathfrak{N}(1) - \mathfrak{N}(t))$ von $\mathfrak{N}(t)$ bezüglich $\mathfrak{N}(1)$, also die Menge aller normalen Punkte von *höchstens* dem Ordnungswert $(t-1)$, wobei $\mathfrak{Q}(1)$ gleich der leeren Menge $\mathfrak{O}$ gesetzt werden soll. (γ) Mit $\mathfrak{A}$ die *Menge aller nicht-normalen Punkte*, also $\mathfrak{A} = R_n - \mathfrak{N}(1)$.

Aus der Unterhalbstetigkeit der positiven, ganzzahligen Funktion $O(X; \mathfrak{C}^*) \mid R_n$ folgt:

Die Menge $\mathfrak{N}(t) = [O(X; \mathfrak{C}^*) > t-1]$ *aller normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert* t *ist offen (im* R_n*), für* $1 \leqq t \leqq k$. *Die Menge* $\mathfrak{Q}(t) = \mathfrak{N}(1) - \mathfrak{N}(t)$ *aller normalen Punkte von höchstens dem Ordnungswert* $(t-1)$ *ist also abgeschlossen in* $\mathfrak{N}(1) = \mathfrak{G}$ *und die Menge* $\mathfrak{A} = R_n - \mathfrak{N}(1)$ *ist abgeschlossen im* R_n.

1. 2. Beispiele **(a)** von Punkten, welche keine t-Punkte sind oder **(b)** von τ-Punkten, welche nicht zum offenen Kern $\mathfrak{P}$ der Menge aller τ-Punkte gehören $(1 \leqq \tau \leqq k)$, oder **(c)** von nicht gewöhnlichen Punkten, welche zu $\mathfrak{P}$ gehören, oder **(d)** von gewöhnlichen, aber nicht-normalen Punkten werden in Nr. 5. 1. ff. angegeben; die Existenz normaler Punkte ist aus Nr. 2. 1. zu entnehmen. Die in Nr. 1. 1. gegebenen Definitionen sind mithin sinnvoll und nicht trivial.

1. 3. In der früheren Arbeit[1]) war als „gewöhnlicher t-Punkt" bezeichnet jeder Punkt, welcher auf einer t-Sekante liegt und dessen Umgebung nur Punkte enthält, deren jeder auf einer τ-Sekante liegt mit $t \leqq \tau$. Die Menge der in diesem Sinne „gewöhnlichen ϱ-Punkte" mit $t \leqq \varrho$ war a. a. O.[2]) als offen angegeben worden; daß dies im allgemeinen nicht richtig ist, entnimmt man aus Nr. 1. 2. Beispiel **(d)**.

§ 2.

Die nicht-normalen Punkte.

2.1. Wir zeigen zunächst:

Die Menge $\mathfrak{A}$ *der nicht-normalen Punkte ist (abgeschlossen in* R_n *und) im Träger* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{C}^*$ *enthalten; die (offene) Menge* $\mathfrak{N}(1)$ *aller normalen Punkte ist also Obermenge von* $R_n' = R_n - \mathfrak{C}$ *und folglich nicht leer.*

Bew. Gemäß Nr. 1.1. ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen im R_n. Daß $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ ergibt sich aus der folgenden Betrachtung; und daß $R_n' \neq \mathfrak{O}$ kann man z. B. aus Nr. 2.2. entnehmen.

2.1.1. *Jeder nicht auf* $\mathfrak{C}$ *gelegene Punkt ist ein t-Punkt, d. h. jeder Punkt* $X \in R_n' = R_n - \mathfrak{C}$ *liegt auf einer Sekante von* $\mathfrak{C}^*$.

Bew. Zunächst sei $n > 2$. (a) Ist $X \in R_n'$ und ist $\mathfrak{H}$ irgend eine Hyperebene durch X, so existieren $(n-2)$-Ebenen $\mathfrak{B}$, welche in $\mathfrak{H}$ liegen und welche X, aber keinen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthalten; denn $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ enthält nur endlich viele von X verschiedene Punkte. Es gibt also in $\mathfrak{H}$ unendlich viele $\mathfrak{B}$ mit $X \in \mathfrak{B}$ und mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{O}$. — (b) Es sei $\mathfrak{b}$ ein Hyperebenenbüschel mit einer Achse $\mathfrak{B}$, für die $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}$, $X \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{O}$; ferner sei keine Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ fremd zu $\mathfrak{C}$. Dann liegen in $\mathfrak{b}$ diejenigen Hyperebenen dicht, die Sekanten sind[7]). — (c) In Rücksicht auf (a) und (b) folgt daraus die Existenz von Sekanten durch jeden Punkt $X \in R_n - \mathfrak{C}$, falls $n > 2$. — Für $n = 2$ aber folgt die Existenz solcher Sekanten unmittelbar aus dem eben[7]) zitierten Satz, wenn man ihn auf ein Geradenbüschel mit X als Zentrum anwendet.

2.1.2. *Jeder nicht auf* $\mathfrak{C}$ *gelegene Punkt ist normal.*

Bew. **(a)** Es genügt, zu zeigen, daß jeder Punkt $X \in R_n'$ eine zu $\mathfrak{C}$ fremde Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(X)$ im R_n besitzt, derart, daß $O(X; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Y; \mathfrak{C}^*)$ für jeden Punkt $Y \in \mathfrak{U}$. Denn alsdann ist jeder Punkt $X \in R_n'$ ein gewöhnlicher Punkt; und weil R_n' offen ist im R_n, ist daher X sogar normal.

(b) Zum Beweise der in **(a)** formulierten Beh. bemerken wir zunächst: Liegt ein Punkt $Z \in R_n'$ auf einer Hyperebene $\mathfrak{H}'$, welche (nicht notwendig Sekante ist, aber) mindestens t *Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat $(1 \leqq t)$, so ist Z ein τ-Punkt mit $t \leqq \tau$. In der Tat: In $\mathfrak{H}'$ existiert zunächst im Falle $n > 2$ (gemäß Nr. 2.1.1., Bew. (a)) eine zu $\mathfrak{C}$ fremde $(n-2)$-Ebene $\mathfrak{B}'$, in welcher Z enthalten ist. Und im Hyperebenenbüschel mit der Achse $\mathfrak{B}'$ gibt es[7]) (beliebig nahe bei $\mathfrak{H}'$) Hyperebenen, welche nur *Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam haben und zwar mindestens t, welche also τ-Sekanten sind mit $t \leqq \tau$, w. z. z. w.

[7]) Vgl. z. B. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1932), Nr. 1.5., 1.8. Die dort bewiesenen Sätze beziehen sich zwar auf Kontinua von endlichem (Relativ-) *Punkt*ordnungswert, gelten aber auch für eindeutige, stetige Streckenbilder von (endlichem, insbesondere) beschränktem *Stellen*ordnungswert.

Für $n = 2$ ergibt sich unmittelbar (vgl. Nr. 2. 1. 1., Bew.), daß Z ein τ-Punkt ist.

(c) Die Existenz der in **(a)** eingeführten Umgebung $\mathfrak{U}$ von $X \in R_n'$ ergibt sich nun so: Gemäß Nr. 2. 1. 1. ist X ein t-Punkt ($1 \leqq t$). Es sei $\mathfrak{H}$ eine t-Sekante durch X. Es gibt dann (für $n \geqq 2$) ein Hyperebenenbüschel $\mathfrak{b}$, dessen Achse in $\mathfrak{H}$ liegt und fremd ist zu X sowie zu $\mathfrak{C}$. In $\mathfrak{b}$ existiert nun eine Umgebung $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{H}$ derart, daß *jede* Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}$ mindestens t Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat. Und zu $\mathfrak{u}$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von X im R_n derart, daß $\mathfrak{U}$ von Hyperebenen $\mathfrak{H}'$ aus $\mathfrak{u}$ überdeckt wird; weil $X \in R_n'$ und weil R_n' offen ist, kann dabei o. B. d. A. $\mathfrak{U} \subset R_n'$ angenommen werden. *Jeder* Punkt $Z \in \mathfrak{U}$ erfüllt somit die in **(b)** gemachten Annahmen. Daher ist $O(X; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Z; \mathfrak{C}^*)$, womit **(a)** bewiesen ist.

2. 2. Ein in $\mathfrak{C}$ enthaltener *offener* Teilbogen $\mathfrak{T}$ heiße frei, wenn eine Umgebung $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{T}$ im R_n existiert derart, daß $(\mathfrak{W} - \mathfrak{T})$ fremd ist zu $\mathfrak{C}$. Unter Benutzung des in Nr. 2. 1. Angegebenen gelangen wir dann zu dem

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ von beschränktem Stellenordnungswert im R_n.*

Beh. *Die abgeschlossene, in $\mathfrak{C}$ enthaltene Menge $\mathfrak{A}$ aller nicht-normalen Punkte ist nirgends dicht in $\mathfrak{C}$. Insbesondere gibt es in beliebiger Nähe eines jeden Punktes von $\mathfrak{A}$ freie Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$, welche nur normale Punkte von einem und dem nämlichen Ordnungswert enthalten (so daß speziell $\mathfrak{T}\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$ ist).*

1. Zusatz. Es ist $\mathfrak{C}$ nirgends dicht in R_n.

2. Zusatz. Nicht-normal sind jedenfalls die Endstellen, ferner im R_2 etwa Schnabelspitzen (vgl. Nr. 5. 1.).

Bew. **(A)** Wir schicken folgende Feststellung voraus. Es sei $\mathfrak{b}$ irgend ein Hyperebenenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse (vgl. Nr. 2. 1. 1., Bew., (a)). Ist dann $P \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}$ diejenige Hyperebene in $\mathfrak{b}$, welche durch P geht, so gibt es zu einer beliebigen Umgebung $\mathfrak{V}$ von P im R_n und in beliebiger Nähe von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{b}$ eine, in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{v}$ von Hyperebenen und dazu eine natürliche Zahl $q \geqq 1$ von folgender Beschaffenheit[8]): Ist $\mathfrak{M}$ die von den Hyperebenen aus $\mathfrak{v}$ überdeckte Punktmenge im R_n, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ Summe aus q *einfachen* (keine Verzweigungspunkte von $\mathfrak{C}$ enthaltenden, offenen) *freien Teilbogen* von $\mathfrak{C}$. Jeder dieser Teilbogen hat mit jeder Hyperebene $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{v}$ genau einen Punkt und zwar einen *Schnitt*punkt gemeinsam, welcher für alle $\mathfrak{H} \in \mathfrak{v}$ bei festem Teilbogen die gleiche Anzahl Schnittstellen trägt; die Summe der Anzahl dieser Schnittstellen für alle q Teilbogen sei etwa q'. Mindestens einer dieser *freien Teilbogen* liegt in $\mathfrak{V}$ (also *beliebig nahe bei P*).

(B) Wir zeigen jetzt: Jeder Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ enthält einen, nur aus normalen Punkten gleichen Ordnungswertes bestehenden, freien

[8]) Vgl. a. a. O.[7]), Nr. 1. 11.

Teilbogen $\mathfrak{T}''$. Es genügt, die Beh. für *freie* Teilbogen zu beweisen; denn in beliebiger Nähe einer jeden Hyperebene $\mathfrak{H}$, welche mit $\mathfrak{T}$ einen Schnittpunkt gemeinsam hat, gibt es (in einem, $\mathfrak{H}$ enthaltenden Büschel $\mathfrak{b}$ mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse) eine in $\mathfrak{b}$ offene Hyperebenenmenge $\mathfrak{u}$ derart[8]), daß der Durchschnitt von $\mathfrak{T}$ mit der Menge der Hyperebenen aus $\mathfrak{u}$ Vereinigung von (beschränkt vielen) freien Teilbogen von $\mathfrak{C}$ ist. Es sei also $\mathfrak{T}$ ein freier Teilbogen von $\mathfrak{C}$, ferner sei $\mathfrak{W}$ eine Umgebung von $\mathfrak{T}$ im R_n mit $(\mathfrak{W}-\mathfrak{T})\,\mathfrak{C}=\mathfrak{O}$ und es sei P ein innerer Punkt von $\mathfrak{T}$. Gemäß **(A)**, angewandt auf eine Umgebung $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{W}$ von P in R_n, für die also $\mathfrak{U}\mathfrak{C}=\mathfrak{U}\mathfrak{T}$ ist, existiert ein (offener) freier Teilbogen $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ und zu $\mathfrak{T}'$ eine Umgebung $\mathfrak{U}'$ von $\mathfrak{T}'$ im R_n mit $\mathfrak{U}'\subset\mathfrak{U}$ derart, daß durch jeden Punkt von $\mathfrak{U}'$ eine q'-Sekante geht. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}'$ ist also ein τ'-Punkt mit $q'\leqq\tau'$. Es sei nun r' das *Maximum* der τ' für die Punkte von $\mathfrak{T}'$ und es sei $Q'\in\mathfrak{T}'$ ein r'-Punkt ($r'\leqq k$). Ist dann $\mathfrak{H}'$ eine r'-Sekante durch Q' und ist $\mathfrak{b}'$ ein, $\mathfrak{H}'$ enthaltendes Hyperebenenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse, so gibt es, wieder gemäß **(A)**, in beliebiger Nähe von Q', also innerhalb $\mathfrak{U}'$, einen (offenen) freien Teilbogen $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}'$ und eine Umgebung $\mathfrak{U}''\subset\mathfrak{U}'$ von $\mathfrak{T}''$ im R_n derart, daß jeder Punkt von $\mathfrak{U}''$ ein τ''-Punkt ist mit $r'\leqq\tau''$. Gemäß der Definition von r' ist aber jeder Punkt P'' von $\mathfrak{T}''$ ein r'-Punkt und, weil von lauter t''-Punkten mit $r'\leqq t''$ umgeben, ein gewöhnlicher Punkt. Überdies ist jeder Punkt von $(\mathfrak{U}''-\mathfrak{C})$ gewöhnlich (sogar normal, Nr. 2. 1. 2.). Da $\mathfrak{T}''$ freier Teilbogen von $\mathfrak{C}$ ist und mithin eine Umgebung $\mathfrak{W}\subset\mathfrak{U}''$ von P'' im R_n existiert mit $\mathfrak{W}\mathfrak{C}=\mathfrak{W}\mathfrak{T}''$, so enthält $\mathfrak{W}$ nur gewöhnliche Punkte. Somit ist jeder Punkt P'' von $\mathfrak{T}''$ sogar normal.

(C) Es ist $\mathfrak{A}$ nirgends dicht in $\mathfrak{C}$. Andernfalls nämlich existierte eine im R_n offene Menge $\mathfrak{V}$ derart, daß $\mathfrak{V}\mathfrak{A}$ dicht wäre in $\mathfrak{V}\mathfrak{C}$. Ist nun $\mathfrak{T}$ gemäß **(A)** ein in $\mathfrak{V}\mathfrak{C}$ enthaltener freier abgeschlossener Teilbogen von $\mathfrak{C}$, so wäre die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ dicht in $\mathfrak{T}$ und folglich wäre $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Dies widerspricht aber der (in **(B)** bewiesenen) Existenz eines Teilbogens $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$, welcher nur normale Punkte enthält, also ganz zu $\mathfrak{N}(1)=R_n-\mathfrak{A}$ gehört. Daß die abgeschlossene Menge $\mathfrak{C}$ nirgends dicht ist im R_n, folgt aus der Existenz offener, zu $\mathfrak{C}$ fremder Mengen in beliebiger Nähe eines jeden Punktes Q von $\mathfrak{C}$; und dies wiederum ist Folge davon, daß $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ endlich ist für (mindestens eine, sogar für) jede Hyperebene durch Q. Damit ist auch der 1. Zusatz bewiesen.

§ 3.

Die normalen Punkte.

Wir untersuchen nun auch die Menge $\mathfrak{N}(1)$ der normalen Punkte oder vielmehr die (bezüglich R_n genommenen, abgeschlossenen) Kom-

plemente $(\mathfrak{A}+\mathfrak{Q}(t))$ der offenen Mengen $\mathfrak{R}(t)$ aller normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert t (mit $1 \leqq t \leqq k$). (Vgl. Nr. 1. 1.).

3. 1. Zunächst sei bemerkt: Jede Hyperebene $\mathfrak{H}$ enthält, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten, ausschließlich normale Punkte. (Denn jeder nicht-normale Punkt liegt in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ ist von endlicher Mächtigkeit).

3. 2. Darüber hinaus gilt

Vor. *Die Hyperebene $\mathfrak{H}$ enthalte mindestens t Schnittstellen $(1 \leqq t)$.*

Beh. (I) *Abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten, welche auf $\mathfrak{C}$ liegen, ist jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ normal und von mindestens dem Ordnungswert t bezüglich $\mathfrak{C}^*$. Insbesondere also enthält $\mathfrak{H}$ höchstens endlich viele (notwendig auf $\mathfrak{C}$ gelegene) normale r-Punkte mit $r < t$.* — (II) *In jedem, $\mathfrak{H}$ enthaltenden Hyperebenenbüschel $\mathfrak{b}$ mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse gibt es beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{v}$ von Hyperebenen derart, daß jede Hyperebene aus $\mathfrak{v}$ auch τ-Sekante mit $t \leqq \tau$ ist und ganz in $\mathfrak{R}(t)$ liegt (also nur normale Punkte enthält und zwar normale τ-Punkte mit $t \leqq \tau$).*

Bew. Betr. (I). Gemäß Nr. 2. 1. 1., Bew., (b), gehen durch jeden Punkt $P \in \mathfrak{H} - \mathfrak{C}$ *Sekanten*, welche beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ liegen und welche infolgedessen [7]) mindestens t Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam haben. Deswegen sowie gemäß Nr. 2. 1. 2. ist P ein normaler τ-Punkt mit $t \leqq \tau$. Da $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ endlich ist, folgt die Beh. — Betr. (II). Gemäß Nr. 2. 2., Bew. **(A)**, gibt es in $\mathfrak{b}$ beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{u}$, so daß der Durchschnitt jeder Hyperebene aus $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{C}$ in q freien, relativ $\mathfrak{b}$ einfachen Teilbogen $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$ von $\mathfrak{C}$ enthalten ist; dabei ist *jede Hyperebene aus $\mathfrak{u}$ eine τ-Sekante mit $t \leqq \tau$*. Gemäß Nr. 2. 2.. Satz, liegen aber auf jedem der $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$ diejenigen Bogen dicht, welche nur *normale* Punkte enthalten. Daher ist in $\mathfrak{u}$ eine (in $\mathfrak{b}$) offene Teilmenge $\mathfrak{v}$ enthalten, so daß $\mathfrak{H}'\mathfrak{C}$ für jede Hyperebene $\mathfrak{H}' \in \mathfrak{v}$ nur normale Punkte enthält, deren jeder ein τ-Punkt mit $t \leqq \tau$ ist. Da andererseits jeder Punkt von $\mathfrak{H}(R_n - \mathfrak{C})$ normaler τ-Punkt ist, folgt die Beh. (II).

3. 3. In diesem Zusammenhange ist noch zu erwähnen der

Satz. Vor. *Es sei $k \geqq 2$ der Stellenordnungswert des eindeutigen, stetigen Streckenbildes $\mathfrak{C}^*$.*

Beh. *Es existieren k-Punkte. Jeder $(k-1)$-Punkt und jeder k-Punkt ist normal (insbesondere gilt dies also für jeden, auf $\mathfrak{C}$ gelegenen $(k-1)$- und k-Punkt). Die Menge aller $(k-1)$- und k-Punkte bzw. die Menge aller k-Punkte ist gleich $\mathfrak{R}(k-1)$ bezw. gleich $\mathfrak{R}(k)$ (ist insbesondere also offen und nicht leer).*

1. Zusatz. Die Menge der $(k-1)$-Sekanten und ebenso die der k-Sekanten ist offen im Raum $R_{n-1}^{(n)}$ aller Hyperebenen des R_n.

2. Zusatz. Es sei $\mathfrak{T}$ der offene Kern der Menge aller t-Punkte $(1 \leqq t \leqq k)$. Dann ist jeder Punkt P von $\mathfrak{T}$, welcher in $\mathfrak{T}$ *minimale*

Ordnung besitzt, ein *gewöhnlicher* Punkt. Insbesondere ist also jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ vom *Ordnungswert Eins* ($t = 1$) ein gewöhnlicher Punkt.

3. Zusatz. Ist $\mathfrak{C}^*$ vom *Maximalstellenindex*, das soll heißen: Ist $k-2 \leqq t \leqq k$ für jeden t-Punkt bezüglich $\mathfrak{C}^*$, so ist der offene Kern $\mathfrak{T}$ der Menge aller t-Punkte identisch mit der Menge $\mathfrak{N}(1) = \mathfrak{N}(k-2)$ aller normalen Punkte.

Bew. **(a)** Da $\mathfrak{C}^*$ den Stellenordnungswert k besitzen soll ($2 \leqq k$), existieren in jedem Falle k-Sekanten[6]), aber keine t-Sekanten mit $k+1 \leqq t$. Jeder auf einer k-Sekante gelegene Punkt ist somit ein k-Punkt (Nr. 3. 2.). Es gibt also k-Punkte. — **(b)** Es sei nun r entweder gleich $(k-1)$ oder gleich k. Jede *r-Sekante* $\mathfrak{H}'$ (soweit solche Sekanten für $r = k-1$ existieren) besitzt im $R_{n-1}^{(n)}$ eine Umgebung $\mathfrak{u}'$ von folgender Beschaffenheit: Jede Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ ist eine r-Sekante. (Dies ist die Beh. von Zusatz 1.) In der Tat: Da $\mathfrak{H}'$ genau r-Schnittstellen, aber keine End- oder Stützstellen enthält, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{u}'$ von $\mathfrak{H}'$ derart, daß jede Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ *mindestens* r Schnittstellen, aber keine Endstelle enthält. Es liegen aber auch keine Stützstellen auf $\mathfrak{H}$; denn andernfalls gäbe es in beliebiger Nähe von $\mathfrak{H}$, also in $\mathfrak{u}'$, solche Hyperebenen $\mathfrak{H}''$, welche mindestens $(k+1)$ Schnittstellen enthielten, und in beliebiger Nähe einer $\mathfrak{H}''$, also ebenfalls in $\mathfrak{u}'$, gäbe es (gemäß Nr. 2. 1. 1., Bew. (b)) dann s-Sekanten mit $k+1 \leqq s$, im Widerspruch damit, daß $\mathfrak{C}^*$ den starken Stellenordnungswert k besitzen soll. Da somit auf keiner $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ eine End- oder Stützstelle liegt, ist jede $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ eine Sekante und zwar eine t-Sekante mit $r \leqq t$. Es ist aber stets $r = t$; denn andernfalls müßte bei stetiger Überführung von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ mindestens eine Schnittstelle „gewonnen" werden, was nur bei Auftreten von Stützstellen möglich ist[9]). Die Beh. in **(b)** ist damit bewiesen. Aus ihr folgt insbesondere der 1. *Zusatz*. — **(c)** Zufolge **(b)** geht durch jeden Punkt einer (hinreichend kleinen) Umgebung $\mathfrak{U}$ (im R_n) eines r-Punktes P (mit $k-1 \leqq r \leqq k$) eine r-Sekante, und zwar auch dann, wenn P auf $\mathfrak{C}$ liegt. Daher enthält $\mathfrak{U}$ nur t-Punkte mit $k-1 \leqq r \leqq t \leqq k$. Folglich ist jeder r-Punkt gewöhnlicher Punkt. Und mithin enthält $\mathfrak{U}$ nur gewöhnliche Punkte. Demgemäß ist jeder $(k-1)$- oder k-Punkt normal. Und es besitzt jeder k-Punkt bzw. jeder $(k-1)$-Punkt eine Umgebung, in welcher nur k-Punkte bzw. nur k- und $(k-1)$-Punkte enthalten sind. Daraus folgt die Beh. des Satzes. — Betr. den 3. *Zusatz*. Es ist jeder $(k-2)$-Punkt von minimalem Ordnungswert, also jeder in $\mathfrak{T}$ enthaltene $(k-2)$-Punkt gewöhnlich; da alle $(k-1)$- und k-Punkte gewöhnlich (sogar normal) sind, ist also jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ gewöhnlich und folglich normal.

---

[9]) Denn $\mathfrak{C}^*$ ist als eindeutiges stetiges Streckenbild (von beschränktem Stellenordnungswert) vorausgesetzt und Endstellen treten hier nicht auf.

3. 4. Es sei A_n ein affiner Raum und $\mathfrak{K}$ eine in A_n beschränkte, abgeschlossene, konvexe Punktmenge; es werde $\mathfrak{K}$ als q-dimensional bezeichnet, wenn $\mathfrak{K}$ in einer q-Ebene $\mathfrak{E}_q$, aber in keiner $(q-1)$-Ebene enthalten ist $(0 \leqq q$; als (-1)-Ebene erklärt man dabei die leere Menge, als 0-dimensional konvex die einpunktigen Mengen). Als relativ offenen Kern von $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir den *bezüglich* $\mathfrak{E}_q$ genommenen offenen Kern von $\mathfrak{K}$. Über die Gestalt von $\mathfrak{Q}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r)$ läßt sich nun folgendes aussagen:

Satz. Vor. *Es sei* $\mathfrak{C}^*$ *eindeutiges stetiges Streckenbild im* R_n, *wobei* $n \geqq 2$. *Ferner besitze* $\mathfrak{C}^*$ *den starken Stellenordnungswert* k. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *die Menge der nicht-normalen Punkte und* $\mathfrak{Q}(r)$ *die Menge derjenigen normalen Punkte, deren Ordnungswert bezüglich* $\mathfrak{C}^*$ *höchstens* $(r-1)$ *beträgt,* $2 \leqq r \leqq k$.

Beh. **A.** *Die abgeschlossene Menge* $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$ *ist projektiv äquivalent zu einer beschränkten Menge (in einem affinen Raum* A_n*).*

B. *Jede Komponente* $\mathfrak{K}$ *von* $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$ *ist projektiv äquivalent zu einer (beschränkten, abgeschlossenen) konvexen Punktmenge (im* A_n*).*

C. *Jede extreme*[10]) *Stützhyperebene* $\mathfrak{H}$ *einer solchen Komponente* $\mathfrak{K}$ *ist fremd zum relativ offenen Kern*[11]) *einer beliebigen anderen Komponente* $\mathfrak{K}'$, *es sei denn, daß* $\mathfrak{K}'$ *in* $\mathfrak{H}$ *enthalten ist.*

Bew. **(A)** Gemäß Nr. 3. 3. existieren k-Punkte und daher auch k-Sekanten $\mathfrak{H}_k$. Gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existieren aber k-Sekanten $\mathfrak{H}_k'$, welche ganz in $\mathfrak{N}(k)$ enthalten, also fremd sind zu $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$. Zeichnet man daher (irgend eine solche) $\mathfrak{H}_k'$ als uneigentliche Hyperebene im R_n aus und berücksichtigt die Kompaktheit des R_n[3]), so ergibt sich die Existenz *eines affinen Raumes* A_n von der in Beh. **A** genannten Art. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise werden wir *im folgenden* einen solchen Raum A_n *zu Grunde legen* und auf ihn Bezeichnungen wie „eigentlicher Punkt", „beschränkt", „Seite einer Hyperebene" usw. beziehen. — **(B)** Es sei $\mathfrak{K}$ eine mehrpunktige Komponente von $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r)$; mit $\mathfrak{Q}'$ ist auch $\mathfrak{K}$ abgeschlossen in A_n. Es seien P_j, $j = 1, 2$, verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ ihre offene Verbindungsstrecke (in A_n). Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{s}\,\mathfrak{N}(r) = 0$. Wir schließen indirekt. Angenommen, es enthielte $\mathfrak{s}$ einen Punkt $Q \in \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(r)$. Dann existierte eine, Q enthaltende t-Sekante $\mathfrak{H}$ mit $r \leqq t$.

Wir unterscheiden die zwei Fälle, daß $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{H}$ entweder (1) enthalten oder (2) nicht enthalten ist. *Im Falle* (1) gibt es einen zu Q

---

[10]) Vgl. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Ergebn. d. Math. u. i. Grenzgeb., 3. Bd., Berlin 1934, Seite 15/16. Wir benutzen hier nur die Eigenschaft der extremen Stützhyperebenen, daß sie Limiten von Tangentialstützhyperebenen sind.

[11]) Als relativ *offener Kern* einer konvexen Punktmenge $\mathfrak{K}'$ werde bezeichnet die Menge aller inneren Punkte aller ganz in $\mathfrak{K}'$ enthaltenen Strecken.

beliebig benachbarten, im Innern von $\mathfrak{s}$ sowie nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkt Q' und durch Q' eine zu $\mathfrak{C}$ fremde, in $\mathfrak{H}$ enthaltene $(n-2)$-Ebene $\mathfrak{B}'$ (falls $n=2$ fällt $\mathfrak{B}'$ mit Q' zusammen). Gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existiert dann im Büschel mit der Achse $\mathfrak{B}'$ beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine, Q' enthaltende, ganz in $\mathfrak{R}$ gelegene Hyperebene $\mathfrak{H}'$. Wegen $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{R}$ liegen P_1 sowie P_2 nicht in $\mathfrak{H}'$ und zwar, wegen $Q' \in \mathfrak{H}'\mathfrak{s}$, auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}'$. Weil $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{H}'\mathfrak{K} = \mathfrak{O}$, wäre daher die zusammenhängende Menge $\mathfrak{K}$ Summe zweier fremder (nicht leerer) abgeschlossener Teile; Widerspruch. *Im Falle* (2) liegen P_1 sowie P_2 auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}$ und ebenso auf verschiedenen Seiten einer zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbarten, ganz in $\mathfrak{R}$ enthaltenen (gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existierenden) Hyperebene $\mathfrak{H}'$. Daraus ergibt sich, wie im Falle (1), ein Widerspruch. (Im Falle (1) ließe sich der Beweis auch unmittelbarer führen). — **(C)** Es sei $\mathfrak{H}$ eine (beliebige) Stützhyperebene, kurz S-Ebene, an $\mathfrak{K}$ im Punkte R des Randes $\mathfrak{K}_r$ von $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{H}$ die *einzige* S-Ebene an $\mathfrak{K}$ in R, so bezeichnen wir $\mathfrak{H}$ als Tangentialstützhyperebene, kurz TS-Ebene. Jede TS-Ebene ist extreme S-Ebene und jede extreme S-Ebene ist Limes von TS-Ebenen (jeder Limes von S-Ebenen ist eine S-Ebene). Es ist aber *jede TS-Ebene (an $\mathfrak{K}$) und damit überhaupt jede extreme S-Ebene Limes von t-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit* $r \leqq t$. In der Tat: Ist R Stützpunkt der TS-Ebene $\tilde{\mathfrak{H}}$, so ist R Limes von zu $\mathfrak{K}$ fremden Punkten $Q_\mu \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(r)$. Durch Q_μ geht daher eine t_μ-Sekante $\mathfrak{H}_\mu$ mit $r \leqq t_\mu$; gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), kann dabei Q_μ o. B. d. A. so angenommen werden, daß $\mathfrak{H}_\mu \subset \mathfrak{R}$, daß also $\mathfrak{H}_\mu$ fremd ist zu $\mathfrak{K}$. Somit liegt $\mathfrak{K}$ ganz auf der einen Seite von $\mathfrak{H}_\mu$. Ist daher $\{\mathfrak{H}'_\mu\}$ eine (stets existierende) *konvergente* Teilfolge von $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ mit $\mathfrak{H}' = \lim \mathfrak{H}'_\mu$, so liegt R auf $\mathfrak{H}'$ (wegen $R = \lim Q_\mu$) und es ist somit $\mathfrak{H}'$ eine S-Ebene in R an $\mathfrak{K}$. Da es nach Annahme in R an $\mathfrak{K}$ nur eine einzige S-Ebene, nämlich $\tilde{\mathfrak{H}}$, gibt, folgt $\mathfrak{H}' = \tilde{\mathfrak{H}} = \lim \mathfrak{H}'_\mu$. Es sei nun $\mathfrak{K}'$ eine von $\mathfrak{K}$ verschiedene Komponente von $\mathfrak{Q}'$, aber nicht $\mathfrak{K}' \subset \tilde{\mathfrak{H}}$. Ist $\mathfrak{K}'$ mehrpunktig und enthält $\tilde{\mathfrak{H}}$ einen Punkt J des relativ offenen Kerns von $\mathfrak{K}'$, so ist J (innerer) Punkt (mindestens) einer in $\mathfrak{K}'$ enthaltenen, offenen Strecke $\mathfrak{s}$, deren Endpunkte E_1, E_2 nicht auf $\tilde{\mathfrak{H}}$, sondern auf verschiedenen „Seiten" von $\tilde{\mathfrak{H}}$ liegen; denn andernfalls wären alle, J enthaltenden, in $\mathfrak{K}'$ enthaltenen Strecken ganz in $\tilde{\mathfrak{H}}$ enthalten, also $\mathfrak{K}' \subset \tilde{\mathfrak{H}}$. Da E_1, E_2 auf verschiedenen Seiten von $\tilde{\mathfrak{H}}$ liegen, enthält jede zu $\tilde{\mathfrak{H}}$ hinreichend benachbarte Hyperebene (innere) Punkte von $\mathfrak{s}$, also (wegen $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{Q}'$) Punkte aus $\mathfrak{Q}'$; dies gilt somit für schließlich alle $\mathfrak{H}'_\mu$. Im Widerspruch damit ist aber $\mathfrak{H}'_\mu \subset \mathfrak{R} = R_n - \mathfrak{Q}'$. Daraus folgt die Beh. in **(C)**.

3. 5. In der Ebene R_2 läßt sich noch etwas mehr aussagen für den speziellen Fall, daß $\mathfrak{C}^*$ endliche Konvexbogensumme ist, das soll heißen: Das Urbildintervall $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}^*$ gestattet eine Zerlegung

in endlich viele, bis auf höchstens ihre Endpunkte fremde Intervalle $\mathfrak{D}_\tau = [d_{\tau-1}, d_\tau]$, $\tau = 1, \ldots, t$; $d_0 = 0$, $d_t = 1$, von folgender Eigenschaft: $\mathfrak{D}_\tau$ ist topologisches Urbild eines streckenfreien, konvexen Teilbogens $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{C}$ und je zwei der $\mathfrak{B}_\tau$ sind identisch oder bis auf höchstens ihre Endpunkte fremd. Es ist also $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}^*$ Vereinigung dieser $\mathfrak{B}_\tau$[12]). Jede endliche Konvexbogensumme $\mathfrak{C}^*$ ist von beschränktem Stellenordnungswert.

Wir bezeichnen eine Stelle $P^*(u)$ der endlichen Konvexbogensumme $\mathfrak{C}^*$ als singulär, wenn $P^*(u)$ in *jeder* Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als Vereinigung endlich vieler, bis auf Endpunkte fremder bzw. identischer Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$, *End*stelle (mindestens) eines der in der Darstellung auftretenden $\mathfrak{B}_\tau$ ist. Für eine singuläre Stelle $P^*(u)$ ist demgemäß entweder der ihr entsprechende Punkt von $\mathfrak{C}$ Verzweigungspunkt[13]) von $\mathfrak{C}$ oder $P^*(u)$ ist Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ oder beliebig kleine Umgebungen von $P^*(u)$ auf $\mathfrak{C}^*$ sind nicht konvex. Der Begriff der singulären Stelle ist somit unabhängig von der jeweils benutzten Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als Vereinigung von Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$, der Begriff ist also festgelegt lediglich durch $\mathfrak{C}^*$ selbst. Jeder einer singulären Stelle entsprechende Punkt von $\mathfrak{C}$ heiße singulär bezüglich $\mathfrak{C}^*$. Ferner heiße eine Gerade $\mathfrak{G}$ singulär (bezüglich $\mathfrak{C}^*$), wenn $\mathfrak{G}$ unter eine der folgenden vier Arten fällt: (1) Es ist $\mathfrak{G}$ Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ (d. h. an einen Teilbogen $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{C}^*$) in einer singulären Stelle; (2) Auf $\mathfrak{G}$ liegen zwei verschiedene singuläre Punkte; (3) Es enthält $\mathfrak{G}$ einen singulären Punkt und ist gleichzeitig Stützgerade an einen der Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$ (in einem nicht singulären Punkt, also in einem inneren Punkt von $\mathfrak{B}_\tau$); (4) Es ist $\mathfrak{G}$ Stützgerade an zwei nicht identische der $\mathfrak{B}_\tau$ und die Stützpunkte sind nicht singulär.

Zu einer endlichen Konvexbogensumme existieren (zufolge der Definition) *nur endlich viele singuläre Stellen, Punkte und Geraden.*

Die angekündigte schärfere Aussage lautet nun so:

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ endliche Konvexbogensumme in R_2. Ferner sei $\mathfrak{K}$ irgend eine mehrpunktige Komponente des Komplements $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'(r)$ der Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(r)$ aller bezüglich $\mathfrak{C}^*$ normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert r.*

Beh. (1) *Der Rand $\mathfrak{K}_r$ von $\mathfrak{K}$ ist ein konvexes Polygon (vom Index Null), ev. eine Strecke.*

(2) *Die Seiten des Polygons $\mathfrak{K}_r$ liegen sämtlich auf singulären Geraden jedenfalls dann, wenn $\mathfrak{K}$ keine Strecke ist.*

Der Beweis kann so geführt werden.

---

[12]) Jedes Kontinuum von beschränktem Punktordnungswert ist erbliche Bogensumme. Vgl. Haupt, Limessätze bei geometrischen Ordnungen, Annali mat. pura appl., Bologna (4) 23 (1944), Nr. 3.1.; vgl. ferner Math. Ann. 120 (1948), Nr. 2.1.

[13]) Verzweigungspunkt im Sinne der topologischen Kurventheorie, K. Menger, Kurventheorie, Leipzig 1932, S. 99, 214.

3. 5. 1. Es sei $\mathfrak{H}$ eine extreme Stützgerade an $\mathfrak{K}$. Gemäß Nr. 3. 4., Satz, Bew. betr. (C), ist $\mathfrak{H}$ Limes von q_μ-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit $r \leqq q_\mu (\leqq k)$, deren jede fremd ist zu $\mathfrak{K}$. Indem wir jeweils eine bestimmte (geeignet gewählte) Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als endliche Konvexbogensumme zu Grunde legen, können wir o. B. d. A.[8]) folgende Annahme machen: Für jedes $\mathfrak{H}_\mu$ ist keine ihrer q_μ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ singulär (diese Schnittstellen liegen also sämtlich innerhalb der $\mathfrak{B}_r$). Durch geeignete Auswahl einer, wieder mit $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ zu bezeichnenden, Teilfolge aus $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ läßt sich erreichen: Alle q_μ sind einander gleich, etwa $q_\mu = q$ mit $r \leqq q \leqq k$; die Urbilder $u_{\mu\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $\mu = 1, 2, \ldots$, der Schnittstellen von $\mathfrak{H}_\mu$ mit $\mathfrak{C}^*$ liegen für *festes* $\varkappa$ und alle μ im *Innern* des gleichen unter den $\mathfrak{B}_\tau$, etwa in $\mathfrak{B}'_\varkappa = \mathfrak{B}_{\tau_\varkappa}$, wobei o. B. d. A. angenommen sei, daß $0 < u_{\mu 1} < u_{\mu 2} < \cdots < u_{\mu q} < 1$; es existiert $u_\varkappa = \lim u_{\mu\varkappa}$ für $\mu \to \infty$ für jedes $\varkappa$ (wobei dann $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_q \leqq 1$ und $u_\varkappa \in \mathfrak{B}'_\varkappa$).

3. 5. 2. Wir zeigen jetzt: Sind in der Reihe der (zu $\mathfrak{H}$ gehörigen) $u_1, \ldots, u_q$ mehr als zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleich, so ist $\mathfrak{H}$ singuläre Gerade, und zwar Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ in einem singulären Punkt.

Bew. Es sei etwa $u_\varkappa = u_{\varkappa+1} = u_{\varkappa+2}$. Zunächst kann $P^*(u_\varkappa)$ nicht Stelle im Innern eines konvexen Teilbogens $\mathfrak{B}'_\varkappa$ von $\mathfrak{C}^*$ sein. Denn sonst müßten für alle μ die drei Stellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+2})$ im Innern von $\mathfrak{B}'_\varkappa$ liegen und in drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}'_\varkappa$ fallen, was der Tatsache widerspricht, daß die drei Punkte einerseits auf einer Geraden $\mathfrak{H}$ und andererseits auf einem konvexen streckenfreien Teilbogen $\mathfrak{B}'_\varkappa$ liegen sollen. Ebenso schließt man, daß $P^*(u_\varkappa)$ nicht Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ sein kann. Somit ist $u_\varkappa$ singuläre Stelle, aber nicht Endstelle von $\mathfrak{C}^*$. Dann liegen von den drei Stellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+2})$ für alle μ mindestens zwei, etwa die beiden ersten, im Innern des gleichen Konvexbogens $\mathfrak{B}'_\varkappa$. Infolgedessen konvergiert $\mathfrak{H}_\mu$ gegen die Trägergerade der Halbtangente an $\mathfrak{B}'_\varkappa$ in $P^*(u_\varkappa)$, so daß $\mathfrak{H}$ singulär ist.

3. 5. 3. Anschließend an Nr. 3. 5. 2. ist nunmehr der Fall zu betrachten, daß unter den zur extremen Stützgeraden $\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{K}$ gehörigen $u_1, \ldots, u_q$ nur zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleich sind, etwa $u_\varkappa = u_{\varkappa+1}$. Dann liegen die $P^*(u_{\mu\varkappa})$ und $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$ für schließlich alle μ in einer (beliebig kleinen, festen) Umgebung $\mathfrak{U}^*$ von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$. Ist nun $P^*(u_\varkappa)$ *nicht singulär*, so konvergieren die $\mathfrak{H}_\mu$ für $\mu \to \infty$ gegen eine *Stützgerade* $\mathfrak{H}'$ an $\mathfrak{C}^*$ mit der *nicht-singulären Stützstelle* $P^*(u_\varkappa)$ und es ist $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$. Ist hingegen $P^*(u_\varkappa)$ singulär, so ist $\mathfrak{H}$ entweder *singuläre Gerade* (wenigstens dann, wenn die $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$ schließlich alle in einer einseitigen Umgebung von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$ liegen und es ist dann $\mathfrak{H}$ singulär von der Art (1)); oder es ist $\mathfrak{H}$ *Stützgerade* an $\mathfrak{C}^*$ mit der *singulären Stützstelle* $P^*(u_\varkappa)$.

3. 5. 4. Schließlich ist der Fall dreier benachbarter, aber verschiedener $u_\varkappa$ in Betracht zu ziehen, also etwa $u_{\varkappa-1} < u_\varkappa < u_{\varkappa+1}$, wobei

$\varkappa = 1$ oder $\varkappa = q$ zugelassen sei; für $\varkappa = 1$ bzw. $\varkappa = q$ ist zu setzen $u_0 = 0$ bzw. $u_{q+1} = 1$. Dann ist $P^*(u_\varkappa)$ Schnittstelle von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ (wobei $P^*(u_\varkappa)$ auch singulär sein kann). In der Tat: Schließlich alle $\mathfrak{H}_\mu$ haben mit einer Umgebung $\mathfrak{U}^*$ von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$, also mit einem einfachen Teilbogen $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{C}^*$ je genau einen Schnittpunkt, nämlich $P^*(u_{\mu\varkappa})$ gemeinsam. Wäre $P^*(u_\varkappa)$ Stützstelle von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{U}^*$, so hätten alle, zu $\mathfrak{H}$ hinreichend benachbarten Geraden $\mathfrak{H}'$, wenn mit $\mathfrak{U}$ mindestens einen, dann sogar mindestens zwei Punkte gemeinsam.

3. 5. 5. Aus der Definition der singulären Geraden (Nr. 3. 5.) und aus den Feststellungen in Nr. 3. 5. 2.—3. 5. 4. folgt: *Jede extreme Stützgerade $\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{K}$, die nicht singulär ist bezüglich $\mathfrak{C}^*$, besitzt nachstehende Eigenschaften:* (I) Sämtliche (etwa vorhandene) Stützstellen von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ fallen in den nämlichen Punkt V von $\mathfrak{C}$ (wobei V auch singulär sein kann); (II) Ist V singulär, so ist $\mathfrak{H}$ nicht Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ in V; (III) Ist a bzw. b bzw. e die Anzahl aller auf $\mathfrak{H}$ gelegenen Schnitt- bzw. Stütz- bzw. Endstellen, so gilt $(r \leqq) q \leqq a + 2b + e$, wobei $0 \leqq e \leqq 1$ und wobei $b = 0$, wenn $e = 1$.

Bew. (I) und (II) folgt aus der Definition der singulären Geraden klar. Hinsichtlich (III) kann man so schließen: Da $\mathfrak{H}$ als nicht-singuläre Gerade höchstens eine Endstelle und dann keine Stützstelle tragen kann, folgt $e \leqq 1$ und $b = 0$ für $e = 1$. Beweis, daß $q \leqq a + 2b + e$ ist:

In beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}$ gibt es q-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit den q Schnittstellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $r \leq q$. Für $\mu \to \infty$ konvergieren diese $u_{\mu\varkappa}$ gegen $u_\varkappa$. Nach dem schon Bemerkten ist nun entweder $u_1 = 0$ oder $u_q = 1$ oder keines von beiden der Fall. Ferner ist $u_2 > 0$ für $u_1 = 0$ bzw. $u_{q-1} < 1$ für $u_q = 1$, da andernfalls $\mathfrak{H}$ singulär wäre von der Art (1) (Nr. 3. 5.). Gemäß Nr. 3. 5. 2. können ferner höchstens je zwei benachbarte der $u_\varkappa$ gleich sein und liefern dann eine Stützstelle von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{C}^*$ (gemäß Nr. 3. 5. 3.). Für die hiermit festgestellten a' Schnitt-, b' Stütz- und e' Endstellen $P^*(u_\varkappa)$ gilt in Rücksicht auf Nr. 3. 5. 4. mithin $q = a' + 2b' + e'$. Beim Grenzübergang von den $\mathfrak{H}_\mu$ zu $\mathfrak{H}$ können nun zu diesen b' Stütz- und e' Endstellen unter Umständen noch neue hinzutreten, etwa b'' Stütz- und e'' Endstellen; hingegen können durch den Grenzübergang keine Schnittstellen gewonnen werden. Setzt man $b = b' + b''$ und $e = e' + e''$, so ergibt sich (III).

3. 5. 6. Ist die in dem zu beweisenden Satze von Nr. 3. 5. betrachtete Komponente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{D}'(r)$ eine Strecke, so ist der Satz richtig. Wir werden daher von jetzt ab voraussetzen, daß der bezüglich R_2 offene Kern $\underline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ nicht leer ist. *Zu beweisen* ist, daß keine extremen Stützgeraden an $\mathfrak{K}$ existieren, die nicht-singulär sind (bezüglich $\mathfrak{C}^*$).

3. 5. 7. Es sei also $\mathfrak{H}$ nicht-singulär und extreme Stützgerade an $\mathfrak{K} > \underline{\mathfrak{K}} \neq \mathfrak{D}$ mit dem Stützpunkt S. Wir *behaupten vorerst, daß* $b \geqq 2$ sein muß. Wäre nämlich *zunächst* $b = 0$, so würden auf *jeder*, zu $\mathfrak{H}$

hinreichend benachbarten Geraden $\mathfrak{H}'$ mindestens $(q-e)$ Schnittstellen liegen, wobei $r \leqq q$. Wir betrachten *Erstens* den Fall, daß S *nicht* in eine, auf $\mathfrak{H}$ gelegene Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ fällt. Weil $e \leqq 1$, gäbe es dann in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}$ Geraden $\mathfrak{H}''$ durch S mit mindestens q Schnittstellen (mit $\mathfrak{C}^*$). Und da S als Stützpunkt von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{K}_r$ Häufungspunkt des nicht leeren offenen Kerns $\underline{\mathfrak{K}}$ der konvexen Menge $\mathfrak{K}$ ist, so gäbe es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}''$, und damit von $\mathfrak{H}$, eine (nicht leere) offene Menge $\mathfrak{u}$ von Geraden, deren jede mindestens r Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat und deren jede gleichzeitig nicht fremd ist zu $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{D}(r)$. Wendet man aber Nr. 3.2., Beh. (II), auf ein in $\mathfrak{u}$ enthaltenes Geradenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremdem Zentrum an (solche Büschel existieren), so ergibt sich die Existenz von in $\mathfrak{u}$ enthaltenen, ganz in $\mathfrak{N}(r)$ gelegenen Geraden, die also fremd sind zu $\mathfrak{D}'(r)$. Widerspruch. Es falle jetzt *Zweitens* S in eine Endstelle von $\mathfrak{C}^*$, etwa in $P^*(0)$. Da $\mathfrak{H}$ extreme Stützgerade von $\mathfrak{K}$ ist, gibt es zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbarte Geraden $\mathfrak{H}'$ durch S, die nicht fremd sind zu $\underline{\mathfrak{K}}$; und, wie oben festgestellt, trägt $\mathfrak{H}'$ außer $P^*(0)$ noch mindestens $(q-1)$ Schnittstellen. Daher gibt es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}'$ eine offene Menge von zu $\underline{\mathfrak{K}}$ nicht fremden Geraden mit je mindestens r Schnittstellen. Dies ist aber, wie vorhin gezeigt, widersinnig. — Wäre *ferner* $b = 1$ (und dann $e = 0$), und wäre V Trägerpunkt der (einzigen) Stützstelle von $\mathfrak{C}^*$ auf $\mathfrak{H}$, so gäbe es Geraden $\mathfrak{H}'$, welche durch V gehen, zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbart sind sowie nicht fremd sind zu $\underline{\mathfrak{K}}$ und auf welchen mindestens $a \geqq q-2 \geqq r-2$ Schnittstellen liegen, sowie entweder eine Stützstelle in V oder (mindestens) zwei zu V beliebig benachbarte Schnittstellen. Daher gäbe es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}'$, und damit von $\mathfrak{H}$, eine offene (nicht leere) Menge von Geraden, auf deren jeder mindestens r Schnittstellen und gleichzeitig Punkte von $\underline{\mathfrak{K}}$, also von $\mathfrak{D}'(r)$ liegen. Daraus folgt, wie im Falle $b = 0$, ein Widerspruch.

3.5.8. Gemäß Nr. 3.5.7. nehmen wir jetzt an: Auf der nichtsingulären, extremen Stützgeraden $\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{K}$ liegen $b \geqq 2$, sämtlich vom Punkt V getragene Stützstellen mit $\mathfrak{C}^*$ und außerdem noch $a \geqq q - 2b$ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ (wegen $b > 0$ ist $e = 0$, so daß Endstellen von $\mathfrak{C}^*$ nicht auf $\mathfrak{H}$ liegen). Wir setzen $b' = 2^{-1}(q-a)$ (vgl. Nr. 3.5.5.; Bew.); es gilt $0 \leqq b' \leqq b$. Ist $b' = 0$ oder $b' = 1$, so ist $a = q$ oder $a = q-2$ und wir können wie in Nr. 3.5.7. für $b = 0$ oder $b = 1$ zu einem Widerspruch gelangen. Es sei also $2 \leqq b' \leqq b$, wobei $q = a + 2b'$. Ferner seien $\mathfrak{B}'_\varrho$, $\mathfrak{B}''_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, b$, konvexe Teilbogen von $\mathfrak{C}^*$, deren jeder V als einen seiner Endpunkte besitzt und die so beschaffen sind, daß jeder Bogen $\mathfrak{U}_\varrho = \mathfrak{B}'_\varrho + \mathfrak{B}''_\varrho$, welcher übrigens, als Punktmenge in R_2 betrachtet, mit $\mathfrak{B}'_\varrho$ oder mit anderen $\mathfrak{U}_\varrho$ identisch sein kann, je eine Umgebung auf $\mathfrak{C}^*$ für jede der b in V vereinigt liegenden Stützstellen von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ liefert. Da $\mathfrak{H}$ Stützgerade an $\mathfrak{U}_\varrho$ in V ist, $\varrho = 1, \ldots, b$, kann o.B.d.A. von $\mathfrak{U}_\varrho$ vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{U}_\varrho < \mathfrak{V}$, wo $\mathfrak{V}$ eine beliebig kleine (feste) Umgebung von V in R_2 bezeichnet, und daß jedes $\mathfrak{U}_\varrho$

ganz auf *einer* „Seite" von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegt, d. h. ganz in (dem Durchschnitt von $\mathfrak{V}$ mit) einer von $\mathfrak{H}$ begrenzten, abgeschlossenen Halbebene.

Jetzt sind nur folgende zwei Fälle möglich: (A) Auf (mindestens) einer der beiden Seiten von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegen mindestens b' der $\mathfrak{U}_\varrho$. In diesem Falle gelangt man analog wie in Nr. 3.5.7. für $b = 1$ zu einem Widerspruch. Oder (B) Auf *jeder* der beiden Seiten von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegen höchstens $(b'-1)$ der $\mathfrak{U}_\varrho$ und auf jeder Seite auch mindestens ein $\mathfrak{U}_\varrho$; also etwa $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_p$ auf der einen und $\mathfrak{U}_{p+1}, \ldots, \mathfrak{U}_b$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{H}$, wobei $1 \leqq p \leqq b'-1$, $1 \leqq b-p \leqq b'-1$. In diesem Falle ist V Verzweigungspunkt von $\mathfrak{C}$ und somit singulär. Daher besitzt $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft (II) in Nr. 3.5.5.. Folglich existiert in R_2 ein Paar abgeschlossener (bis auf V fremder) (Scheitel-) Winkelräume $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ mit V als gemeinsamem Scheitel und mit folgenden Eigenschaften: Es liegt $(\mathfrak{H}-(V))$ im Komplement von $\mathfrak{W}'+\mathfrak{W}''$; ist ferner $\mathfrak{V}' = \mathfrak{U}_1 + \cdots + \mathfrak{U}_p$, $\mathfrak{V}'' = \mathfrak{U}_{p+1} + \cdots + \mathfrak{U}_b$, dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V} < \mathfrak{V}$ von V in R_2 derart, daß $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}' < \mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{V}''\mathfrak{V}' < \mathfrak{W}''$. Nun gelangen wir so zu einem Widerspruch: Es existiert eine in $\mathfrak{V}'$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{V}''$ von V in R_2 und eine $\mathfrak{H}$ enthaltende offene Menge $\mathfrak{u}$ von Geraden so, daß jede, V nicht enthaltende Gerade $\mathfrak{H}' \in \mathfrak{u}$ fremd ist entweder zu $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}''$ oder zu $\mathfrak{V}''\mathfrak{V}''$ und daß $\mathfrak{H}'$ zugleich mit jedem $\mathfrak{U}_\varrho$ höchstens 2 Schnittpunkte gemeinsam hat. Dies folgt aus den Eigenschaften von $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ bzw. $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}''$. Somit hat jede solche Gerade $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{C}^*$ innerhalb $\mathfrak{V}''$ weniger als $2b'$ Stellen gemeinsam, während doch schließlich alle Geraden $\mathfrak{H}_\mu$ zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbart sind sowie fremd zu V und mit $\mathfrak{C}^*$ innerhalb $\mathfrak{V}''$ mindestens $2b'$ Schnittstellen gemeinsam haben (gemäß der Definition von b').

Damit ist der Satz in Nr. 3.5. bewiesen.

§ 4.

Ordnungsfeste Erweiterung von Bogen.

4.1. Je nachdem die beiden Endstellen des eindeutigen, stetigen Streckenbildes $\mathfrak{C}^*$ verschiedene oder gleichen Träger (Endpunkte) besitzen, wollen wir von einem *Bogen* oder von einer *Kurve* sprechen. Es sei jetzt $\mathfrak{C}^*$ ein Bogen vom starken Stellenordnungswert k mit den beiden Endpunkten E_1, E_2. Die beiden offenen Strecken im (projektiven) R_n, welche die Endpunkte E_1, E_2 besitzen, seien $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}''$. Dann sind $\mathfrak{C}^{*\prime} = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{C}^{*\prime\prime} = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{s}''$ Kurven[14]) vom beschränkten

[14]) Dabei sind $\mathfrak{C}^{*\prime}$ und $\mathfrak{C}^{*\prime\prime}$ als Kurven in einem etwas weiteren Sinne, als bisher von uns gebraucht, zu verstehen, insofern sie nämlich je eine *Strecke* $\mathfrak{s}'$ bzw. $\mathfrak{s}''$ enthalten. Die Trägergerade dieser Strecken hat also mit der Kurve unendlich viele Punkte gemeinsam. Sieht man bei der Definition des Stellenordnungswertes der Kurven $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}^{**}$ von allen Hyperebenen ab, in denen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$ enthalten sind, so erhält man den schwachen Stellenordnungswert (vgl. a. a. O.[12]), Nr. 1.4.2.).

schwachen Stellenordnungswert k' bzw. k''. Es ist nun entweder $k' = k$ und $k'' = k+1$ oder umgekehrt. In der Tat: Einerseits ist $k' + k'' \equiv 1 \pmod 2$, also $\mathrm{Min}(k', k'') < \mathrm{Max}(k', k'')$; denn von unseren beiden Kurven hat die eine eine ungerade, die andere eine gerade Anzahl Stellen mit einer k-Sekante von $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam und das gilt dann für jede Sekante überhaupt. Andererseits ist $k-1 < \mathrm{Min}(k', k'') < \mathrm{Max}(k', k'') < k+2$. Daraus folgt die Beh. Ist etwa $k' = k$, so bezeichnen wir $\mathfrak{s}'$ als die *Schlußstrecke* von $\mathfrak{C}^*$; durch Hinzufügung von $\mathfrak{s}'$ zu $\mathfrak{C}^*$ wird also der schwache Stellenordnungswert k nicht geändert (schwach ordnungsfeste Erweiterung des Bogens zu einer Kurve). Es gilt nun der

Satz. (A) *Jeder Bogen $\mathfrak{C}^*$ im R_n vom starken Stellenordnungswert k läßt sich durch Hinzufügung seiner Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ zu einer Kurve $\mathfrak{K}^*$ erweitern, deren schwacher Stellenordnungswert gleich k ist.* **(B)** *Die Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ ist enthalten in einer Komponente $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{O}'(k) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$; dabei enthält $\mathfrak{O}'(k)$, also auch $\mathfrak{s}'$, keine k-Punkte.*

Bew. (A) folgt aus den vorangehenden Überlegungen. — (B) ergibt sich so: Wegen $k' = k$ wird $\mathfrak{s}'$ von keiner k-Sekante getroffen, so daß $\mathfrak{s}'$ keine k-Punkte enthält. Da aber (gemäß Nr. 3. 4.) sämtliche k-Punkte normal sind, also in $\mathfrak{N}(k)$ liegen, ist $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{O}'(k)$. Weil $\mathfrak{s}'$ zusammenhängend ist, liegt daher $\mathfrak{s}'$ in einer Komponente von $\mathfrak{O}'(k)$.

4. 2. Mit Hilfe der Feststellungen in Nr. 4. 1. erhalten wir weiter den

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ ein Bogen vom starken Stellenordnungswert k im R_n mit $n \geqq 2$; und es sei $\mathfrak{K}'$ die die Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ von $\mathfrak{C}^*$ enthaltende Komponente von $\mathfrak{O}'(k)$. Schließlich sei $\mathfrak{B}$ ein (einfacher), keine hyperebenen Teilbogen enthaltender Bogen vom starken (Stellen-) Ordnungswert n, welcher die Endpunkte von $\mathfrak{s}'$ verbindet und in $\mathfrak{K}'$ enthalten ist $(n \leqq k)$.*

Beh. *Je nachdem $n \equiv 0 \pmod 2$ oder $n \equiv 1 \pmod 2$ ist $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{B}$ eine Kurve, deren starker Stellenordnungswert höchstens $(k + n - 2)$ oder höchstens $k + n - 1$ beträgt.*

Zusatz. *Im Falle $n = 2$* existiert ein solcher Bogen $\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}'$ zweidimensional ist. Dann und nur dann ist also $\mathfrak{C}^*$ *ordnungsfest* (d. h. ohne Änderung des starken Stellenordnungswertes) zu einer Kurve ohne Teilstrecken erweiterbar. Ist überdies $\mathfrak{C}^*$ vom Maximalstellenindex (d. h. ist $k-2 \leqq t \leqq k$ für *jeden* t-Punkt bezüglich $\mathfrak{C}^*$), so kann $\mathfrak{C}^*$ ordnungsfest zu einer Kurve vom Maximalstellenindex (ohne Teilstrecken) erweitert werden.

Bew. (1) O. B. d. A. können wir $\mathfrak{K}'$, also auch $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ als beschränkt annehmen (Nr. 3. 4., Beh. A.). Mithin ist $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ eine Kurve von geradem schwachem Stellenordnungswert. Für jede, $\mathfrak{s}'$ nicht enthaltende Sekante $\mathfrak{H}$ von $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ ist also $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ oder $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$, je nachdem $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ eine gerade oder ungerade Anzahl Stellen gemeinsam hat. — (2) Ist $\mathfrak{H}$ eine Sekante von $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{B}$, von der auch $\mathfrak{B}$ getroffen wird, so ist $\mathfrak{H}$ (gemäß Nr. 4. 1. Satz, (B)) nicht fremd zu $\mathfrak{K}'$ und hat daher, falls

$\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$, nicht mehr als $(k-2)$ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam; denn wegen $\mathfrak{H}\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{O}$ kann $\mathfrak{H}$ nicht mehr als $(k-1)$ Schnittstellen enthalten und wegen $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ auch nicht $(k-1)$ Schnittstellen (gemäß Nr. 4. 1., Satz). — (3) Ist $\mathfrak{H}$ eine Hyperebene, welche *höchstens* $(n-2)$ *Punkte*[15]) von $\mathfrak{B}$ enthält, so hat $\mathfrak{H}$ höchstens $(n-2+k)$ Schnittstellen mit $\mathfrak{B}^*$ gemeinsam. Es sei nun $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$ eine Hyperebene, welche $(n-1)$ *bzw. n Schnittpunkte* mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat; o. B. d. A. können dabei auch die auf $\mathfrak{H}$ liegenden Stellen von $\mathfrak{C}^*$ als Schnittstellen und $\mathfrak{s}'$ als nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten angenommen werden. Die Anzahl aller Schnittstellen von $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$ mit $\mathfrak{B}^*$ sei p' bzw. p''. *Im Falle* $n \equiv 0$ ist nun $\mathfrak{H}'\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{H}''\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ (gemäß (1)) und folglich $p' \leqq (n-1)+(k-1) = n+k-2$ bzw. $p'' \leqq n+(k-2) = n+k-2$ (letzteres gemäß (2)). *Im Falle* $n \equiv 1$ hingegen ist $\mathfrak{H}'\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{H}''\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$ und folglich $p' \leqq (n-1)+(k-2) = n+k-3$ bzw. $p'' \leqq n+(k-1) = n+k-1$; w. z. z. w. Der Zusatz ist ohne weiteres klar.

§ 5.

Verschiedene Beispiele.

Die vorangehenden Begriffsbildungen und Sätze sollen noch für den Fall $n = 2$ durch Beispiele erläutert werden[16]).

5.1. Punkte, welche nicht t-Punkte sind $(1 \leqq t)$.

Solche Punkte werden geliefert: (a) durch die Endpunkte eines jeden Bogens; (b) durch eine Schnabelspitze, d. h. durch einen inneren Punkt S eines (etwa einfachen) Bogens $\mathfrak{C}$ von der Art, daß in S an $\mathfrak{C}$ genau eine Halbtangente $\mathfrak{h}$ existiert und daß eine Umgebung von S auf $\mathfrak{C}$ ganz im einen der beiden von der Halbtangente h und von der Normalen auf h in S gebildeten Quadranten liegt. (Eine solche Schnabelspitze S ist nämlich Stützpunkt auf *jeder*, also Schnittpunkt auf *keiner*, durch S gehenden Geraden); (c) durch eine Dornspitze D, auf deren Spitzentangente eine, nicht nach D fallende Stützstelle liegt. Eine Dornspitze D ist dabei erklärt als innerer Punkt eines (etwa einfachen) Bogens $\mathfrak{C}$ von der Art, daß in D an $\mathfrak{C}$ genau eine Halbtangente $\mathfrak{h}$ existiert und daß die beiden einseitigen Umgebungen von D auf $\mathfrak{C}$ in verschiedenen derjenigen beiden Quadranten liegen, welche von $\mathfrak{h}$ und der Normalen auf $\mathfrak{h}$ in D gebildet werden. (Eine solche Dornspitze D ist nämlich Stützpunkt auf jeder Geraden durch D mit Ausnahme der Spitzentangente, d. h. der Trägergeraden von $\mathfrak{h}$, auf welcher D Schnittpunkt ist.)

Anmerkung. Die Verteilung der t-Punkte für die verschiedenen Werte von t im Falle einer von zwei, bis auf einen gemeinsamen

[15]) Diese Punkte können o. B. d. A. als Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ und folglich als von den Endpunkten verschieden angenommen werden.

[16]) Vgl. oben im Text Nr. 1.2. sowie a. a. O.[1]), S. 135.

Endpunkt fremden, Konvexbogen gebildeten Schnabelspitze kann an einer zugehörigen Figur einfach abgelesen werden.

5. 2. Punkte, welche zwar t-Punkte, aber nicht innere Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ aller t-Punkte sind ($1 \leqq t \leqq k$).

Einen solchen Punkt kann man mit Hilfe der nachstehenden Konstruktion erhalten: (A) Es sei $\mathfrak{B} = \overset{\frown}{E_1 E_2}$ ein streckenfreier, stetig differenzierbarer Konvexbogen ohne parallele Tangenten (die Tangenten in den Endpunkten einbegriffen). Auf $\mathfrak{B}$ werde ein innerer Punkt Q ausgezeichnet sowie eine, auf $\mathfrak{B}$ monoton von E_1 her gegen Q konvergierende Folge verschiedener Punkte P_μ. Das vom Bogen $\mathfrak{B}$ bzw. von seinem Teilbogen $\mathfrak{B}'_\nu = \overset{\frown}{P_{2\nu-1} P_{2\nu}}$ und von der Strecke $E_1 E_2$ bzw. $P_{2\nu-1} P_{2\nu}$ begrenzte, konvexe, offene „Segment" sei mit $\mathfrak{S}$ bzw. mit $\mathfrak{S}_\nu$ bezeichnet, $\nu = 1, 2, \ldots$. Jede Gerade hat dann mit höchstens zweien der S_ν Punkte gemeinsam. — (B) Es sei jetzt $\mathfrak{B}_\nu$ ein in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegener, streckenfreier, einfacher, offener, stetig differenzierbarer Bogen mit den Endpunkten $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$, der an Singularitäten, außer Wendepunkten, genau eine Schnabelspitze besitzt und im übrigen stückweise konvex ist. Außerdem soll sich $\mathfrak{B}_\nu$ in $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$ stetig differenzierbar an $(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'_\nu)$ anschließen, $\nu = 1, 2, \ldots$. — (C) Die Bogensumme $\overset{\frown}{Q E_2} + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}''_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}''_2 + \cdots$, wobei $\mathfrak{B}''_\nu = \overset{\frown}{P_{2\nu} P_{2\nu+1}}$ Teilbogen von $\mathfrak{B}$, ist dann ein einfacher Bogen $\mathfrak{B}^*$ von endlichem starkem Stellenordnungswert, auf dem Q zwar ein t-Punkt, aber zugleich Häufungspunkt von Schnabelspitzen ist, welch letztere nicht t-Punkte sind (Nr. 5. 1.).

5. 3. Punkte, welche zwar innere Punkte der Menge aller t-Punkte ($1 \leqq t$), aber keine gewöhnlichen Punkte sind.

Konstruktion. (A) wie in Nr. 5. 2. — (B) Als Bogen $\mathfrak{B}_\nu$ nehmen wir jetzt einen in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegenen, streckenfreien, einfachen, offenen, stetigdifferenzierbaren, stückweise konvexen Bogen mit den Endpunkten $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$, welcher an Singularitäten[17]) genau eine Dornspitze D_ν besitzt, deren Spitzenhalbtangente $\mathfrak{h}$ parallel und gleichgerichtet ist zur Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in E_1 sowie fremd zu $\mathfrak{B}_\nu$, während die Trägergerade von $\mathfrak{h}$ bzw. die Gerade durch D_ν und Q mit $\mathfrak{B}_\nu$ genau zwei bzw. mindestens drei (von D_ν verschiedene) *Schnittpunkte* gemeinsam hat. — (C) Eine Gerade durch Q und durch geeignete, zu D_ν hinreichend benachbarte Punkte hat mit $\mathfrak{B}_\nu$ (mindestens) 5 Schnittpunkte gemeinsam, so daß Q auf $\mathfrak{B}^*$ den Ordnungswert $k \geqq 6$ besitzt. Da andererseits D_ν für jedes ν gewöhnlicher Punkt vom Ordnungswert Drei bezüglich ($\mathfrak{B}_\nu$ und) $\mathfrak{B}^*$ ist (wegen des Fehlens paralleler Tangenten an $\mathfrak{B}$) und da die Punkte einer Umgebung von Q in R_2 sämtlich t-Punkte sind, so ist Q nicht-gewöhnlicher, innerer Punkt der Menge aller t-Punkte. (Es ist Q sogar isolierter Punkt der Menge aller nicht-gewöhnlichen Punkte.)

[17]) abgesehen von Wendepunkten.

5.4. Punkte, welche zwar gewöhnliche, aber nicht normale Punkte sind.

Konstruktion. (A) wie in Nr. 5.2. — (B) Es wird (A) und (B) wie in Nr. 5.3. ausgeführt (aber jetzt statt auf das Segment $\mathfrak{S}$) auf jedes einzelne Segment $\mathfrak{S}_\nu$, wie sie in Nr. 5.2. vermöge (A) konstruiert wurden; dabei sollen die Spitzenhalbtangenten aller (unendlich vielen) in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegenen Dornspitzen parallel und gleichgerichtet sein zur Halbtangente an den ursprünglich zu Grunde gelegten Bogen $\mathfrak{B}$ im Endpunkt E_1 (vgl. Nr. 5.3., (B)). Wir erhalten so statt $\mathfrak{B}'_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu$ einen Bogen $\mathfrak{B}^*_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu$. Schließlich werde der Teilbogen $\overset{\frown}{QE_2}$ von $\mathfrak{B}$ ersetzt durch den zu ihm bezüglich Q spiegelbildlichen Konvexbogen $\overset{\frown}{QE_2^*}$; dadurch entsteht in Q eine Dornspitze, für welche die Trägergerade der Spitzenhalbtangente außer Q keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ oder mit einem der $\mathfrak{S}_\nu$ gemeinsam hat. — (C) Es sei $\mathfrak{B}^* = \overset{\frown}{QE_2^*} + B_1^* + \mathfrak{B}_1'' + \mathfrak{B}_2^* + \mathfrak{B}_2'' + \cdots$. Dann besitzt Q bezüglich $\mathfrak{B}^*$ den Ordnungswert Eins; und da eine Umgebung von Q im R_2 nur t-Punkte enthält, ist Q gewöhnlicher Punkt (vgl. Nr. 3.3., Zusatz 2.). Andererseits enthält aber (zufolge der Konstruktion) $\mathfrak{B}^*_\nu$ einen auch bezüglich $\mathfrak{B}^*$ nicht-gewöhnlichen Punkt Q^*_ν. Mithin ist Q gewöhnlich, aber Häufungspunkt von nicht-gewöhnlichen Punkten bezüglich $\mathfrak{B}^*$.

5.5. *Isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{Q}(t)$ aller normalen Punkte von höchstens dem Ordnungswert $(t-1)$.* Ein derartiger Punkt ist insbesondere *einpunktige* (isolierte) *Komponente von $\mathfrak{Q}(t)$.* — Beispiel: Einfacher streckenfreier, stetig differenzierbarer Bogen, welcher Summe dreier Konvexbogen ist und an Singularitäten eine Dornspitze D sowie einen Wendepunkt besitzt, wobei ferner $t = 3$ und D vom Ordnungswert 2 ist, während in einer Umgebung von D in R_2 nur normale Punkte von mindestens der Ordnung 3 liegen.

5.6. Einfacher Bogen vom Ordnungswert $k\,(=4)$, dessen Endpunkte isolierte Punkte von $\mathfrak{A}$ und innere Punkte von $\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$ sind.

Ein derartiger Bogen mit $k = 4$ kann so erhalten werden: Es sei $\mathfrak{K}$ ein streckenfreier, stetig differenzierbarer Konvexbogen ohne parallele Tangenten. An $\mathfrak{K}$ setze man in seinen Endpunkten T', T'' je einen Konvexbogen $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{K}''$ der gleichen Art so an, daß in T' und in T'' je ein Wendepunkt entsteht. Überdies können und sollen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ so gewählt werden: $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ sind fremd; ferner liegen ihre, von T' und T'' verschiedenen Endpunkte im Innern desjenigen, von den beiden Wendetangenten in T' und T'' gebildeten Winkelraums, welcher Scheitelwinkelraum des $\mathfrak{K}$ enthaltenden Winkelraumes ist; schließlich ist $\mathfrak{K}'+\mathfrak{K}+\mathfrak{K}''$ vom starken Ordnungswert $k = 4$.

5.7. Einfache geschlossene Kurve vom Ordnungswert k, für die $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$ ist und $\mathfrak{Q}(k)$ keine zweidimensionale Komponente besitzt. Beispiel: Die Evolute der Ellipse.

5. 8. Die Anzahl der Komponenten des offenen Kerns von $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$ kann beliebig groß sein.

5. 8. 1. Zur Konstruktion derartiger (einfacher) Bogen $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*$ betrachten wir zunächst das kartesische Bild $\mathfrak{B}_1$ von $y = \sin 2\pi m x$, $0 \leqq x \leqq 1$; $m \geqq 2$; es ist $\mathfrak{B}_1$ Summe endlich vieler Konvexbogen. Von den beiden Endpunkten E_1', E_1'' abgesehen, ist jeder Punkt von $\mathfrak{B}_1$ normal und besitzt maximal den Ordnungswert $(2m+1)$ bezüglich $\mathfrak{B}_1$. Um die Menge $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(2m+1)$ zu beschreiben, bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}'$ bzw. $\mathfrak{B}''$ denjenigen größten *konvexen* Teilbogen von $\mathfrak{B}_1$, dessen einer Endpunkt E_1' bzw. E_1'' ist. Es sei dann $\mathfrak{d}$ die gemeinsame Tangente von $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ (von der also $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ je in einem inneren Punkte gestützt wird); ferner sei $\mathfrak{t}'$ bzw. $\mathfrak{t}''$ die Tangente durch E_1' bzw. E_1'' an $\mathfrak{B}''$ bzw. an $\mathfrak{B}'$. Ist dann F' bzw. F''' der Schnittpunkt von $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{t}'$ bzw. mit $\mathfrak{t}''$, so ist $\mathfrak{Q}'$ das abgeschlossene, die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ nicht enthaltende Viereck $\mathfrak{V}_1$, dessen Seiten die beschränkten bzw. nichtbeschränkten Verbindungsstrecken von E_1' mit F' und von F'' mit E_1'' bzw. von E_1'' mit E_1' und von F' mit F'' sind. Schließlich sei $\mathfrak{R}_1$ das Rechteck $(-1 \leqq x \leqq +2;\ -2 \leqq y \leqq +2)$.

5. 8. 2. Es sei nun $\mathfrak{B}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{V}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{R}_\sigma$ das Bild von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{R}_1$ vermöge Translation in der $+y$-Richtung je um die Strecke der Länge $(\sigma-1)a$, $\sigma = 1, \ldots, s$; $a > 0$. Bei beliebig vorgeschriebenem $s \geqq 3$ werde $m \geqq 2s-2$ gewählt. Ist nun $a > 0$ hinreichend groß, so sind die $\mathfrak{R}_\sigma$ fremd und es hat jede Gerade, die mindestens 2 der B_σ trifft, mit *jedem* der $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\sigma$ höchstens einen Punkt gemeinsam; es sei a derart gewählt. Sind E_σ', E_σ'' die Bilder von E_1', E_1'' bei der zu σ gehörigen Translation, so verbinde man $E'_{2\nu-1}$ mit $E'_{2\nu}$ sowie $E''_{2\nu}$ mit $E''_{2\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{-1}s$ bzw. $2^{-1}(s-1)$, durch je einen Kreisbogen $\mathfrak{K}_\nu$, welcher fremd zum Streifen $0 < x < 1$ und dessen Radius so groß ist, daß jede Parallele zu jeder, den $\mathfrak{K}_\nu$ in 2 Punkten treffenden Geraden höchstens je einen Punkt mit jedem der $\mathfrak{B}_\sigma$ gemeinsam hat. Für die aus den $\mathfrak{B}_\sigma$ und den $\mathfrak{K}_\nu$ gebildete Bogensumme $\mathfrak{C}$ hat dann die zugehörige Punktmenge $\mathfrak{Q}'$ mindestens $(s-1)$ Komponenten. In der Tat: Jede Gerade, welche keinen oder mindestens zwei der $\mathfrak{B}_\sigma$ trifft, hat mit $\mathfrak{C}$ nicht mehr als $2(s-1)+s = 3s-2$ Punkte gemeinsam[18]). Jede Gerade, welche genau einen der $\mathfrak{B}_\sigma$ trifft, hat mit $\mathfrak{C}$ maximal $k = 2m+3$ Punkte gemeinsam; und zwar wird diese Anzahl k erreicht nur von solchen Geraden, welche mit dem betreffenden $\mathfrak{B}_\sigma$ genau $(k-2)$ Schnittpunkte gemeinsam haben. (Denn wegen $2s \leqq m+2$ ist $3s-2 < 2m+3$, also k wirklich der Ordnungswert von $\mathfrak{C}$.) Mithin ist $\mathfrak{Q}'(k)$ für $\mathfrak{C}$ gleich dem Durchschnitt der $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_\sigma$, welcher mindestens $(s-1)$ Komponenten besitzt.

[18]) Sogar nur höchstens s Punkte, so daß auch $m \geqq s-1$ genügt.

(Eingegangen am 11. März 1948.)

Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Hermann Schmidt in Braunschweig.

Vor einigen Jahren hat Herr Lorey [4] auf ein Eulersches Verfahren zur Berechnung m-ter Wurzeln durch Iteration linearer homogener Transformationen aufmerksam gemacht, Herr Krafft [3] gab anschließend einen besonders einfachen Konvergenzbeweis, den Herr Müller [6] neuerdings von unnötigen Einschränkungen über die Anfangswerte befreite und verallgemeinerte. Durch den mir freundlicherweise gestatteten Einblick in die Druckbogen dieser Arbeit wurde ich angeregt, ältere Untersuchungen wieder aufzugreifen, die sich teilweise mit denen von Herrn Müller überschneiden, in anderer Hinsicht aber darüber hinausgehen. Als tieferer Kern des Eulerschen Verfahrens erscheinen uns danach die Sätze über die Approximation von Fixpunkten bei wiederholter Ausübung von Kollineationen im n-dimensionalen projektiven Raum, wie sie im Lauf der Zeit in verschiedenem Allgemeinheitsgrade aufgestellt wurden, insbesondere der unten formulierte Satz 2, dem sich der Euler-Kraffsche Fall unterordnet. Eine Darlegung dieser Verhältnisse, die möglichst unmittelbar und mit möglichst geringem Aufwand an Rechnung und algebraischen Begriffen sogleich zu rechnerisch verwertbaren Bedingungen für die Lage des Ausgangspunktes der Approximation führt, dürfte vielleicht erwünscht sein, zumal in den genannten Arbeiten, die sich im Anschluß an Euler auf sehr spezielle Fälle beschränken, der geometrisch ja naheliegende Zusammenhang nicht hergestellt wird (er dürfte aber Wirtinger vorgeschwebt haben, vgl. Lorey [4] 196[1]). Es sei hier auch auf die inhaltreiche Arbeit [15] von Herrn Wielandt hingewiesen, wo zur Vorbereitung der Iterationsmethode für Integraloperatoren auch der algebraische Fall eine übersichtliche mehr begrifflich gehaltene Behandlung erfährt (vgl. besonders Abschnitt 4, S. 114 ff. und unten[3]).

---

[1]) Für die dort erwähnten W-Kurven, die schließlich auch bei uns auftreten, ohne daß wir etwas über sie oder über kontinuierliche Gruppen als bekannt anzunehmen brauchten, vgl. die Übersicht bei Schubarth [12].

Im Folgenden ersetzen wir, in anderer Richtung etwas allgemeiner, den Folgenindex durch eine stetige Veränderliche t, und leiten zunächst als Hilfsmittel eine geschlossene Darstellung für eine zu vorgeschriebenen Anfangswerten gehörige Lösung eines linearen homogenen Differenzengleichungssystems mit festen Koeffizienten her (Satz 1). Satz 3 beschäftigt sich mit mehrfachen Eigenwerten, und zum Schluß folgt eine mit den obigen Fragen in loserem Zusammenhang stehende Bemerkung über Fixkurven einer einzelnen Affinität (Satz 4).

§ 1.

Analytische Iteration linearer Transformationen.

Gegeben sei das lineare homogene Differenzengleichungssystem

$$x(t+1) = x(t)\,A. \tag{1}$$

Hierin bedeute A eine $m(=n+1)$-reihige, quadratische, nichtsinguläre Matrix komplexer Zahlen, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)})$ die gesuchte Lösungszeile, t sei reell, insbesondere ganzzahlig. Im letzteren Falle gibt es genau eine Lösung $x(\nu)$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), die für $\nu = 0$ den beliebigen Anfangswert x_0 annimmt, nämlich

$$x = x_0 A^{\nu}. \tag{2}$$

Zur asymptotischen Untersuchung benötigen wir aber eine andere Darstellung, die die Eigenwerte von A hervortreten läßt und zugleich für beliebige t brauchbar ist. Wir bilden hierzu die Matrix

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} z^t (z\,E - A)^{-1}\,dz, \tag{3}$$

wo der Integrationsweg eine einfach geschlossene Kurve sei, die ganz in einer von 0 nach ∞ aufgeschnittenen komplexen z-Ebene verläuft und die Umlaufszahl 1 bezüglich jedes Eigenwerts von A hat. arc z sei an einer beliebigen Stelle des Wegs normiert, dann stetig fortgesetzt. Durch Eintragen von (3) in (1) sieht man sofort, daß die Zeilen von $X(t)$ (1) erfüllen. Ferner ist $X(0) = E$ die Einheitsmatrix. Denn für $t = 0$ ist $z = 0$ eine reguläre Stelle des Integranden, also $X(0) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} (z\,E - A)^{-1} = E$. Letzteres folgt aus der für große $|z|$ gültigen Entwicklung $(z\,E - A)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{A^{\lambda}}{z^{\lambda+1}}$, oder auch aus der später noch gebrauchten Darstellung

$$(z\,E - A)^{-1} = (f_{jk}(z)) : f(z), \tag{4}$$

worin $f(z) = \det(z\,E - A)$ ein normiertes Polynom genau m-ten Grades ist, während die $f_{jj}(z)$ vom genau $(m-1)$-ten Grade, die $f_{jk}(z)$ $(j \neq k)$ aber geringeren Grades sind. Es ist also $X(\nu) = A^{\nu}$, so daß man

definieren kann $A^t = X(t)$, wodurch eine (sogar für alle komplexen t) eindeutige, analytische Funktionsmatrix entsteht. Weiter setzen wir nun, wenn $\varrho_\lambda (\lambda = 0, 1, \ldots l)$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ bedeutet.

$$(5) \qquad (zE - A)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} \frac{A_{\lambda\varkappa}}{(z - \varrho_\lambda)^\varkappa}.$$

Dabei ist jeweils die Polordnung $h_\lambda \leqq$ der Vielfachheit k_λ des Eigenwerts ϱ_λ als Nullstelle von $f(z)$. Vergleich von (5) mit (4) zeigt

$$(6) \qquad A_{\lambda h_\lambda} = \frac{k_\lambda!}{(k_\lambda - h_\lambda)!} \left(f_{jk}^{(k_\lambda - h_\lambda)}(\varrho_\lambda)\right) : f^{(k_\lambda)}(\varrho_\lambda).$$

Anderseits folgt durch Heraufmultiplizieren mit der Matrix $zE - A$ und Koeffizientenvergleichung nach Entwicklung an der Stelle $z = \varrho_\lambda$

$$(7\,a) \qquad A_{\lambda,\varkappa+1} = A_{\lambda\varkappa}(A - \varrho_\lambda E) = (A - \varrho_\lambda E) A_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots h_\lambda - 1)$$

und

$$(7\,b) \qquad A_{\lambda h_\lambda}(A - \varrho_\lambda E) = (A - \varrho_\lambda E) A_{\lambda h_\lambda} = 0.$$

Durch (7a) sind bei bekannten $A_{\lambda 1}$ die übrigen Zählermatrizen in (5) bestimmt: für die $A_{\lambda 1}$, die „Frobeniusschen Kovarianten“ vgl. etwa die Darstellung bei Wegner [14] 201, 205. Wir merken uns hier nur die ohne weiteres aus (5) hervorgehende Formel an

$$(8) \qquad E = \sum_{\lambda=0}^{l} A_{\lambda 1}.$$

Durch Einsetzen von (5) in (3) und Berechnung der Residuen folgt nun

$$(9) \qquad X(t) = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} A_{\lambda\varkappa} \varrho_\lambda^{t-\varkappa+1} \binom{t}{\varkappa - 1} \quad [2],$$

und damit

Satz 1. *Eine für alle reellen (und komplexen) t analytische Lösung des Differenzengleichungssystems* (1), *die für $t = 0$ den Anfangswert x_0 annimmt, ist $x = x_0 X(t)$, wenn $X(t)$ die Matrix* (9) *bedeutet. Für $t = \nu$ liefert sie die eindeutig bestimmte Folge* (2).

Zu gegebenem $x_0 \neq 0$ gibt es nun wenigstens ein Indexpaar λ, $\varkappa$ mit $x_0 A_{\lambda\varkappa} \neq 0$; es gilt ja nach (8) oder (9) für $t = 0$

$$(10) \qquad x_0 = \sum_{\lambda=0}^{l} x_0 A_{\lambda 1}.$$

Unter diesen Paaren wählen wir diejenigen, für die $|\varrho_\lambda|$ maximal ist. Ist dann $\varkappa = \varkappa_1$ das Maximum der auftretenden $\varkappa$-Werte, und wird schließlich die Numerierung so eingerichtet, daß dieses genau für

[2]) Methodisch vgl. z. B. Nörlund [7] 297/8, Schwerdtfeger [13] 33, Mac Duffee [5] 100, Z. 3 von unten.

$\lambda = 0, 1, \ldots l_1$ erreicht wird, dann ergibt sich aus (9) sofort die asymptotische Darstellung

$$(11) \quad x(t) = t^{\varkappa_1 - 1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{l_1} x_0 A_{\lambda \varkappa_1} \varrho_\lambda^{t-\varkappa_1+1} + O\left(\frac{\varrho_0^t}{t}\right) \right\} \text{ für reelles } t \to +\infty.$$

Sie enthält, wie leicht zu sehen, insbesondere für $t = \nu$ ganzzahlig die asymptotische Formel (4. 7) bei Wielandt [15] (im Falle eines nichtsingulären A)[3]).

Ist nun hier $l_1 = 0$, so daß die Summe in (11) aus einem einzigen Glied besteht, so ist also

$$\lim_{t \to \infty} x(t)\, \varrho_0^{-t+\varkappa_1-1}\, t^{-\varkappa_1+1} = x_0 A_{0\varkappa_1} \neq 0.$$

In der Sprechweise der projektiven Geometrie heißt das[4]): der Punkt x strebt gegen den Fixpunkt $x_0 A_{0\varkappa_1}$. Dieser braucht freilich nicht von der Wahl von x_0 unabhängig zu sein, auch sind die entsprechenden Bedingungen für x_0, wie sie aus der Herleitung von (11) hervorgehen, vielleicht nicht ganz bequem zu prüfen. Für die Anwendung wird daher der besondere Fall in erster Linie in Betracht kommen, daß ein einfacher Eigenwert ϱ_0 mit $|\varrho_0| > |\varrho_1| \geqq |\varrho_\lambda|$ für $\lambda = 1, 2, \ldots l$ vorhanden ist. Es ist dann zunächst der relative Fehler in (11) gleich $O\left(\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^t t^{h_1-1}\right)$, $\varkappa_1 = h_0 = k_0 = 1$, ferner $A_{01} = (f_{jk}(\varrho_0)) : f'(\varrho_0) \neq 0$ und Rang $(\varrho_0 E - A) = m - 1$. Sei etwa $f_{11}(\varrho_0) = \tau \neq 0$. (7 b) mit $\lambda = 0$

---

[3]) Um den Übergang zu den dortigen Formulierungen wirklich durchzuführen, ist zunächst festzustellen, daß (unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen) die dort eingeführte Sprechweise „ein Eigenwert ϱ_λ ist an x_0 beteiligt" mit Rücksicht auf die Bemerkungen bei (4. 6) a. a. O. S. 115 offenbar auf $x_0 A_{\lambda 1} \neq 0$ hinauskommt; denn wegen (7) ist ja (10) eine Darstellung des Anfangsvektors x_0 als Summe von „Hauptvektoren" im Sinne von [15] 114/115, d. h. also von Komponenten aus den „invarianten Teilgebilden"

$$x(A - \varrho_\lambda E)^{h_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots l)$$

(vgl. Schreier-Sperner [11] II. § 6, besonders 74, Satz 13). Ersichtlich ist

$$\prod_0^l (z - \varrho_\lambda)^{h_\lambda} = M(z)$$

das „Minimalpolynom" (m-ter Frobeniusscher Elementarteiler) zur Matrix A. Daß weiter die $x_0 . A_{\lambda \varkappa_1}$ Eigenvektoren sind, folgt aus der Definition und aus (7 a b). Bei unserem Gedankengang sind indes diese Begriffe nicht erforderlich, vielmehr wird alles auf die Frage, welche unter den Produkten $x_0 A_{\lambda \varkappa}$ nicht verschwinden, und damit auf unmittelbar prüfbare Bedingungen für x_0 hinausgespielt. — Es sei noch bemerkt, daß unsere Methode dem von Herrn Wielandt a. a. O. im Falle von Integraloperatoren (aber nicht im algebraischen Falle) benützten, mit der Fredholmschen Resolvente zusammenhängenden Verfahren nahesteht.

[4]) Wegen (7 a b).

besagt, daß in jeder (nicht verschwindenden) $\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$ von $\tilde{A}_{01}$ ein System von projektiven Koordinaten $\begin{matrix}\text{des}\\ \text{der}\end{matrix}$ zum Eigenwert $\begin{cases}\varrho_0\\ \varrho_0^{-1}\end{cases}$ gehörigen Fixpunkts $\xi = (\xi^{(k)})$ Fixhyperebene $\omega = (\omega_j)$ der Kollineation $\begin{cases}\sigma x^* = xA\\ \sigma u^* = u\tilde{A}\end{cases}$ steht. Die untere der Behauptungen folgt in der Tat sofort aus $u\left(\tilde{A} - \frac{E}{\varrho_0}\right) = 0$ oder also $(\varrho_0 E - A)\,\tilde{u} = 0$. ($\sim$ bezeichnet den Übergang zur transponierten Matrix, $\tilde{A} = \tilde{A}^{-1}$ die komplementäre einer quadratischen nicht singulären Matrix.)

Wir dürfen setzen $\xi^{(1)} = \omega_1 = 1$, worauf dann

(12) $f_{1k}(\varrho_0) = \tau\,\xi^{(k)}$. $f_{j1}(\varrho_0) = \tau\,\omega_j$ (j. $k \geqq 2$) und $f_{jk}(\varrho_0) = \tau\,\omega_j\,\xi^{(k)}$.

Wenn nun

$$\sum_{j=1}^{m} x_0^{(j)}\,\omega_j \neq 0,$$

d. h. x_0 nicht auf der Hyperebene ω liegt, folgt

$$\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) : x^{(1)}(t) = \xi^{(k)} = \frac{f_{1k}(\varrho_0)}{f_{11}(\varrho_0)}.$$

Damit haben wir

Satz 2. *Es sei ξ ein Fixpunkt einer nichtsingulären Kollineation A des komplexen n-dimensionalen projektiven Raumes, der zu einem einfachen Eigenwert ϱ_0 streng maximalen Betrags gehört. Liegt dann der Punkt x_0 nicht auf der zu $\frac{1}{\varrho_0}$ gehörigen Fixhyperebene, so strebt die Folge seiner Bilder bei Wiederholung der Abbildung, und ebenso ein auf der Kurve $x = x(t)$ des Satzes 1 laufender Punkt für $t \to \infty$, gegen den Grenzpunkt ξ. Fixpunkt und Ausnahmehyperebene sind durch* (12) *in Verbindung mit* (4) *gegeben*[5]).

---

[5]) Für ältere Sonderfälle vgl. z. B. Schoenfliess [10], S. 423/4. — Ein verwandter Satz auch bei O. Perron [9], Satz VII. In unserer Bezeichnungsweise handelt es sich dort um eine „Begleitmatrix" der besonderen Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1\ a_n \end{pmatrix}$$

und es werden die Verhältnisse der Elemente einer Spalte von A^ν untersucht, während es sich bei uns um eine allgemeine nichtsinguläre Matrix A und die Verhältnisse der Elemente einer Zeilenkombination handelt. Demgemäß tritt dort die Frage nach der zulässigen Auswahl von x_0 nicht auf; übrigens sind die Methoden von den unseren ganz verschieden, auch ist dort nicht auf geometrische Deutungen eingegangen.

Im Euler-Krafftschen Falle ist (vgl. Krafft [3] (8))

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & j \geqq k \\ r > 0, & j < k \end{cases}, \quad \varrho_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{m-1} e^{2\pi i \lambda \varkappa / m} \cdot \varrho^\lambda, \quad 0 < \varrho = \sqrt[m]{r}.$$

Man bestätigt sofort, daß die Werte

$$\xi^{(k)} = \varrho^{k-1}, \quad \omega_j = \varrho^{-(j-1)}$$

die linearen Gleichungen (7b) für die Zeilen und Spalten von A_{01} erfüllen. Nach Satz 1 ist also (sogar im Komplexen) die Annahme

$$\sum_{1}^{m} x_0^{(j)} \varrho^{-j} \neq 0,$$

gewiß also die a. a. O. [3] gemachte Voraussetzung $x_0^{(j)} > 0$ hinreichend für

$$\frac{x^{(k+1)}}{x^{(k)}} \to \frac{\xi^{(k+1)}}{\xi^{(k)}} = \varrho$$

für $t \to \infty$.

Eine ähnliche Bedingung, nämlich

$$\sum_{j=1}^{m} x_0^{(j)} \varrho_0^{-j} \neq 0$$

ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2, wenn man setzt

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1 \quad 0 \end{vmatrix}.$$

Es wird dann

$$f(z) = z^m - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda z^{m-\lambda}$$

und nach (7) oder (12)

$$\sigma \xi^{(k)} = \varrho_0^k - \sum_{\lambda=1}^{k-1} a_\lambda \varrho_0^{k-\lambda} \text{ insbesondere } \frac{a_m x^{(1)}}{x^{(m)}} = \frac{x^{(m)}(t+1)}{x^{(m)}(t)} \to \frac{a_m \xi^{(1)}}{\xi^{(m)}} = \varrho_0$$

(vgl. für $x_0 = (1, 0, \dots 0)$ die anders gewonnenen Formeln bei Perron [9] (26')). Will man nur ϱ_0 berechnen, so genügt es demnach, nach Festlegung von $x^{(m)}(\nu)$ für $\nu = 0, 1, \dots (m-1)$ die Differenzengleichung

$$u(\nu + m) = \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda u(\nu + m - \lambda) \tag{13}$$

für $x^{(m)}$ weiter zu behandeln. Im Grunde kommt man also hier auf das altbekannte Bernoullische Verfahren zur Wurzelberechnung algebraischer Gleichungen zurück, nur mit erweiterter Anfangsbedingung:

die auf Grund von (13) schrittweise zu berechnenden Werte $u(\nu)$ brauchen keine Potenzsummen zu werden.

Die Prüfung, ob $\sum x_0^{(j)} \omega_j \neq 0$, erfordert wegen der Werte (12) schon eine näherungsweise Kenntnis von ϱ_0. Im folgenden, für numerische Zwecke wohl in erster Linie in Frage kommenden Falle erübrigt sie sich völlig. Die Elemente a_{jk} von A seien aus einem Unterkörper K des komplexen Zahlkörpers, z. B. rationale Zahlen, und $f(z)$ sei über K unzerlegbar. Unter den obigen Voraussetzungen über ϱ_0 sind dann die Größen $f_{1k}(\varrho_0)$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ des $K(\varrho_0)$ linear unabhängig. Andernfalls wäre nämlich für gewisse $r_k \in K$, die nicht sämtlich verschwinden, wegen (12) für jedes j

$$\sum_{k=1}^{m} r_k f_{jk}(\varrho_0) = 0, \text{ also auch } \sum_{k=1}^{m} r_k f_{jk}(z) \equiv 0,$$

da der Grad von $f_{jk}(z) \leqq m-1$. Dann wäre aber auch

$$0 = \det(f_{jk}(z)) = f^{m-1}(z) \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Die Hyperebene ω enthält keinen Punkt mit Koordinaten $\in K$, die Elemente von x_0 dürfen in K beliebig (nur nicht alle 0) angenommen werden.

Liegt x_0 auf ω, so entsteht das gleiche Problem in einem projektiven Raum von um 1 geringerer Dimension, bei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ als Eigenwerten, so daß sich neue Formulierungen wohl erübrigen. Dagegen soll noch der Fall behandelt werden, daß ϱ_0 mehrfacher Eigenwert ist. Es sei jetzt $k_0 \geqq 2$ und $|\varrho_0| \geqq |\varrho_\lambda|$ $(\lambda \neq 0)$, ferner $h_\lambda < h_0$ falls $|\varrho_\lambda| = |\varrho_0|$. Dann erzeugen die linear unabhängigen unter den Zeilen / Spalten von A_{0h_0} { einen linearen Unterraum L von Fixpunkten / eine lineare Schar A von Fixhyperebenen } zu ϱ_0 / ϱ_0^{-1}. Aus (9) erhält man daher ähnlich wie früher, gleich unter Benützung der eingeführten Mannigfaltigkeiten L und A formuliert,

Satz 3. *Die Matrix A einer nichtsingulären Kollineation habe einen Eigenwert ϱ_0 von (im weiteren Sinn) maximalem Betrag; etwa vorhandene betragsgleiche Eigenwerte seien Pole geringerer Ordnung der Funktionsmatrix $(zE - A)^{-1}$ als ϱ_0. Liegt dann x_0 nicht im Durchschnitt D der zu ϱ_0^{-1} gehörigen Fixhyperebenenschar A, so strebt der Bildpunkt bei der analytischen Iteration gegen den (nicht mehr notwendig von x_0 unabhängigen!) Punkt $x_0 A_{0h_0}$ des zu ϱ_0 gehörigen Fixpunktraumes L. (Berechnung der gebrauchten Stücke nach (6) (7)).*

Wir bemerken noch, daß die Iterierten von y_0 (nicht aus D) dann und nur dann dem gleichen Fixpunkt zustreben wie die von x_0, wenn y_0 dem linearen Raum angehört

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} y^{(\mu)} x_0^{(\nu)} (c_{\mu\varkappa} c_{\nu\lambda} - c_{\mu\lambda} c_{\nu\varkappa}) = 0 \quad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 1, \ldots m \\ (c_{\varkappa\lambda}) = A_{0,h_0} \end{pmatrix},$$

der übrigens mit dem Gesamtraum zusammenfallen kann.

§ 2.

Die Fixkurven einer einzelnen Affinität.

Wir gehen hier von einer einzelnen linearen Abbildung des affinen m-dimensionalen Raumes durch eine nicht singuläre Matrix A aus:

$$'x = xA. \tag{14}$$

Bei ihr geht, wenn $p(t)$ eine Zeile stetiger komplexwertiger Funktionen der Periode 1 bedeutet, die stetige Kurve

$$x = p(t)\,X(t) \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{15}$$

wegen (1) als Ganzes in sich über. Wir wollen noch kurz zeigen, daß in gewissem Sinne (15) alle zu A und damit der unendlichen zyklischen Gruppe $A^\nu (\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ gehörigen Fixkurven liefert; der Nachdruck liegt darauf, daß nicht die Invarianz bei der kontinuierlichen Gruppe A^α (α beliebig reell) gefordert, diese auch gar nicht benützt wird.

Wir verstehen hier unter einem Fixbogen $\mathfrak{B}$ zu A ein offenes Jordansches Kurvenstück $x = x(\tau)$, wo $-\infty \leqq \alpha < \tau < \beta \leqq +\infty$, das durch $'x = xA$ auf sich selbst (und nicht nur einen echten Teil), damit also topologisch auf sich abgebildet wird. Dann gilt

Satz 4. *Jeder Fixbogen $\mathfrak{B}$ der Abbildung* (14), *der keinen Fixpunkt enthält, läßt sich in der Form* (15) *darstellen.*

Beweis. Es darf $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ angenommen werden, sonst könnte man für $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ z. B. $\tau^* = -\left(\frac{1}{\tau - \alpha} + \frac{1}{\tau - \beta}\right)$, bzw. für $\alpha = -\infty < \beta < \infty$ $\tau^* = \tau - \frac{1}{\tau - \beta}$ einführen, beide Male mit $\frac{d\tau^*}{d\tau} > 0$. Daß $\mathfrak{B}$ Fixbogen ist, drückt sich nun darin aus, daß

$$'x = x(\tau)A = x('\tau), \tag{16}$$

wo auf Grund der Voraussetzungen (insbesondere $\det A \neq 0$)

$$'\tau = '\tau('x) = '\tau(x(\tau)A) = g(\tau)$$

die offene Zahlenachse topologisch auf sich abbildet. Da $\mathfrak{B}$ keinen Fixpunkt enthalten soll, darf dann $g(\tau) > \tau$ und damit $g(\tau)$ streng monoton steigend angenommen werden. Wir suchen dann eine Parametertransformation $\tau = \psi(t)$, $'\tau = \psi('t)$, die diese Zuordnung in eine Translation verwandelt:

$$\psi(t+1) = g(\psi(t)) \text{ oder also } \psi^{-1} g \psi(t) = t + 1. \tag{17}$$

Hierzu genügt es, etwa in $0 \leqq t < 1$ zu setzen $\psi(t) = t\,g(0)$, ferner induktiv $\psi(t) = g(\psi(t-1))$ zu definieren für $h \leqq t < h+1$ ($h = 1, 2, \ldots$ entsprechend für $t < 0$. Man prüft leicht, daß $\psi(t)$ monoton wächst

und die Zahlenachse eineindeutig in sich transformiert[6]). Damit verwandelt sich aber (14) in $y(t+1) = y(t)\,A$, wenn $x(\psi(t)) = y(t)$ gesetzt wird. Nun ist $\det X(t) \neq 0$ für alle t, worauf wir sogleich zurückkommen. Daraus folgt, daß $y\,X^{-1}$ eine Zeile stetiger Funktionen mit der Periode 1 ist, w. z. b. w.

$\det X(t) \neq 0$ folgt nun bekanntlich nicht entsprechend wie bei Differentialgleichungen unmittelbar aus $\det X(0) \neq 0$, vgl. z. B. Nörlund [7] 274/6, Art. 145. Unserer an (3) anknüpfenden Methode entspricht vielleicht am besten die Bezugnahme auf folgenden allgemeinen Satz der Matrizenanalysis, aus dem sogleich

$$A^t \cdot A^s = A^{t+s}, \tag{18}$$

damit für $t = -s$ die Behauptung, allgemein die volle Rechtfertigung der Bezeichnung A^t folgt, und für den wir einen kurzen Beweis andeuten wollen:

Satz 5. *Setzt man für jede in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $F(z)$ und jede m-reihige quadratische Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in $\mathfrak{G}$ liegen*

$$2\pi i F(A) = \int F(z)\,(z\,E - A)^{-1}\,dz\,, \tag{19}$$

wo der Integrationsweg bezüglich aller Eigenwerte die Umlaufszahl 1 hat, so folgt aus $F(z)\,G(z) = H(z)$ stets $F(A)\,G(A) = H(A)$ [7]).

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Integraldarstellung

$$F(A)\,G(A) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{\nu,\,\lambda=0}^{l} \int_{\mathfrak{k}_\nu} dz \int_{\mathfrak{K}_\lambda} dw\, \frac{F(z)\;G(w)}{w-z} \left(\frac{1}{z\,E - A} - \frac{1}{w\,E - A} \right).$$

Hier sind wie in (5) ϱ_λ die verschiedenen Eigenwerte von A, und die Integrationswege $\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{K}_\lambda$ seien Kreise um ϱ_λ vom Radius r_λ bzw. R_λ mit $r_\lambda < R_\lambda$. Irgend zwei zu λ, ν $(\lambda \neq \nu)$ gehörige Kreise sollen dabei auseinander liegen.

Abschließend sei noch kurz bemerkt, daß jetzt vermöge (18) durch Grenzübergang unter dem Integralzeichen die (bekannte) Formel hervorgeht $\frac{d\,A^t}{d\,t} = A^t \lg A$ ($\lg A$ vermöge (19) eindeutig, solange die ϱ_λ eine wie bei (3) aufgeschnittene z-Ebene nicht verlassen), wodurch die Kurven $x = x_0 A^t$ nunmehr in der Tat als W-Kurven des projektiven n-dimen-

---

[6]) Ein ähnliches Verfahren ist in der seither erschienenen Arbeit [1] von Herrn Bödewadt enthalten (S. 501, § 2, 1, Absatz 1), weshalb wir uns knapp fassen durften. — Der obige Hilfssatz über die Transformation der Fixkurven in sich kann, wenn man die abzählbare Gruppe der Iterierten von $g(\tau)$ ins Auge faßt, mit einem Satz der Theorie der kontinuierlichen Gruppen über die Zurückführung eingliedriger Gruppen auf Translationen in Parallele gesetzt werden, vgl Pascal [8] 205.

[7]) Herr Fantappié [2] gewinnt umgekehrt aus dieser Aussage und einigen naheliegenden Forderungen die Darstellung (19). Im Referat hierüber bei Mac Duffee [5] ist S. 100, Zeile 19 die Stelle „is ... $d(A)$“ unrichtig und etwa durch „is $D(t)\,(A - t\,E)^{-1}/_{rs}$, and $D(t) = d(A - t\,E)$“ zu ersetzen.

sionalen Raumes erkannt sind (als Lösungskurven des Differentialsystems $\frac{dx}{dt} = xB$ mit $B = \lg A$). Hieraus folgt übrigens, daß gleichzeitig mit (9) die Darstellung gilt:

$$A^t = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} B_{\lambda\varkappa} \varrho_\lambda^t \frac{t^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!},$$

wo die $B_{\lambda\varkappa}$ entsprechend aus B hervorgehen, wie die $A_{\lambda\varkappa}$ in (9) aus A.

Schriftenverzeichnis.

U. T. Bödewadt.
[1] Zur Iteration reeller Funktionen, Math. Z. 49 (1944), 497—516.
L. Fantappié.
[2] La calcul des matrices. C. R. Acad. sc. Paris 186 (1928), 619—621.
M. Krafft.
[3] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monatsh. Math. Phys. 59 (1941), 312—315.
W. Lorey.
[4] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monatsh. Math. Phys. 48 (1939), 190—197.
C. C. Mac Duffee.
[5] The theory of matrices, Ergebnisse der Math. II 5, Berlin 1933.
M. Müller.
[6] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung, Math. Z. 51 (1949), 474—496.
N. E. Nörlund.
[7] Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.
E. Pascal.
[8] Repertorium der Höheren Mathematik I (1900). Deutsch von Schepp.
O. Perron.
[9] Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. 64 (1907), 1—76.
A. Schoenfliess.
[10] Projektive Geometrie, Enz. Math. Wiss. III 1. 3, (1909).
O. Schreier und E. Sperner.
[11] Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, Bd. II, Leipzig/Berlin 1935.
E. Schubarth.
[12] Bestimmung der W-Kurven, Verh. Naturforsch. Ges. Basel 38 (1927), 459—475.
H. Schwerdtfeger.
[13] Les fonctions de matrices. Actualités scientifiques 649. Paris 1938.
U. Wegner.
[14] Über die Frobeniusschen Kovarianten, Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), 201—208.
H. Wielandt.
[15] Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertsaufgaben, Math. Z. 50 (1944), 93—143.

(Eingegangen am 5. Februar 1949.)

Gesetze in Ringen. I.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Wilhelm Specht in Erlangen.

Den nachfolgenden Untersuchungen zugrundegelegt ist die Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null im Sinne von E. Steinitz[1]), also die Gesamtheit aller Systeme mathematischer Größen, in denen Addition und Multiplikation mit den folgenden üblichen Eigenschaften erklärt sind: Die Addition soll dem kommutativen und dem assoziativen Gesetze genügen und ausnahmslos umkehrbar sein, die Multiplikation dagegen im allgemeinen nur dem assoziativen Gesetze genügen, das distributive Gesetz aber beidseitig erfüllt sein.

Die Forderung der Charakteristik Null besagt, daß die Vielfachen λa eines von 0 verschiedenen Elementes a eines Ringes sämtlich verschieden sein sollen, daß also $\lambda a = 0$ mit ganzem λ nur dann gelten soll, wenn $\lambda = 0$ oder $a = 0$ ist[2]). Diese Forderung ist für diese Untersuchungen eine wesentliche und notwendige Einschränkung, da die herangezogenen Hilfsmittel aus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe schon für Primzahlcharakteristiken nicht mehr in ausreichendem Umfange zur Verfügung stehen.

Weitere Bedingungen werden den Ringen der zu untersuchenden Gesamtheit im allgemeinen nicht auferlegt, insbesondere nicht die Bedingung der Existenz der Einheit, wenn auch die Ringe mit Einheit im Verlauf der Untersuchungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen werden.

In der Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null sind die kommutativen Ringe durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß in ihnen auch die Multiplikation dem kommutativen Gesetze genügt, also die Bedingung

$$f(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

für jedes Wertepaar der Unbestimmten x_1, x_2 des Ringes erfüllt ist, obwohl der Ausdruck $f(x_1, x_2)$ in einem noch schärfer zu kennzeichnenden Sinne formal nicht verschwindet.

---

[1]) Vgl. E. Steinitz. Algebraische Theorie der Körper, Journal f. d. reine und angew. Math. **137** (1910). 167—308. Buchausgabe Walter de Gruyter, Berlin 1930.

[2]) Durchwegs werden ganze rationale Zahlen mit griechischen, Ringelemente mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

In einem nilpotenten Ringe gilt mit einem festen Exponenten n die Gleichung

$$f(x_1) \equiv x_1^n = 0$$

für jeden Wert der Unbestimmten x_1 des Ringes, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller zweireihigen Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum \pm x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3} x_{\nu_4} = 0,$$

in der die Summe über alle Permutationen der ersten vier Ziffern zu erstrecken und das Vorzeichen danach zu wählen ist, ob die Permutation gerade oder ungerade ist, für jedes Wertequadrupel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3, x_4 aus diesem Matrixring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller dreireihigen Matrizen der Gestalt

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 x_2 - x_2 x_1) x_3 - x_3 (x_1 x_2 - x_2 x_1) = 0$$

für jedes Wertetripel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3 aus diesem Ring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3)$ formal nicht verschwindet.

Wie diese Beispiele erkennen lassen, können für einen Ring $\mathfrak{R}$ unter Umständen gewisse formal nichtverschwindende Ausdrücke

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

aufgestellt werden mit der Eigenschaft, daß für jede Wertereihe der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllt ist. Eine solche Gleichung will ich ein *Gesetz* des Ringes nennen [3]).

[3]) Von einem sehr abstrakten, formalen Standpunkt aus gelangt G. Birkhoff zu ähnlichen Begriffbildungen in seiner Arbeit On the structure of abstract algebras, Proceedings Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433—454. Von ihm habe ich die Bezeichnung Gesetz (Law) übernommen. Spezielle Gesetze, dort Rechenregeln genannt, treten in den geometrischen Grundlagenuntersuchungen von K. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Ann. **113** (1937), 528—567 auf. Naturgemäß finden sich einige Berührungspunkte, die indes lediglich die einfachsten formalen Dinge betreffen. Entsprechende Fragestellungen für Gruppen behandelt B. H. Neumann, Identical relations in groups I, Math. Ann. **114** (1937), 506—525.

Die Menge aller in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze erfüllt gewisse Vollständigkeitsbedingungen, die unabhängig von Struktureigenschaften des Ringes allgemein charakterisiert werden können. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß zu einer beliebig gewählten Menge von Gesetzen, die diese Vollständigkeitsbedingungen erfüllt, stets Ringe existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen. Besitzt der Ring $\mathfrak{R}$ insbesondere eine Einheit, so erfüllt die Menge der in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze eine einfache zusätzliche Vollständigkeitsbedingung. Auch hier kann nachgewiesen werden, daß zu einer beliebigen Menge von Gesetzen, die außer den allgemeinen Vollständigkeitsbedingungen diese zusätzliche Forderung erfüllt, auch Ringe mit Einheit existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen.

Die eben erwähnten Vollständigkeitsbedingungen haben ihren Ursprung darin, daß aus einem im Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze durch genau zu kennzeichnende Verfahren stets weitere Gesetze als Folgegesetze abgeleitet werden können. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob nicht die Menge aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus einer Teilmenge von Gesetzen möglichst einfacher Struktur abgeleitet werden könne. In der Tat lassen sich alle in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus den *mehrfach linearen* Gesetzen herleiten, die wiederum auf eine endliche oder unendliche, nach wachsenden Dimensionszahlen geordnete Folge von mehrfach linearen Gesetzen zurückgeführt werden können. Es ist mir hier bisher noch keine Entscheidung der Frage gelungen, ob sich für jeden Ring $\mathfrak{R}$ eine endliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen angeben läßt, aus denen alle in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze abgeleitet werden können, oder ob auch Ringe existieren, in denen für die Herleitung aller in ihnen geltenden Gesetze eine unendliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen erforderlich ist.

Eingehendere Untersuchungen können für Ringe mit Einheit durchgeführt werden. Zunächst läßt sich zeigen, daß eine Beschränkung auf Gesetze möglich ist, deren formal gebildeten partiellen Ableitungen nach sämtlichen Unbestimmten verschwinden. Für die mehrfach linearen Gesetze, deren partielle Ableitungen sämtlich verschwinden, können mit Hilfe der höheren Kommutatoren genaue Strukturaussagen gemacht werden. Sie lassen sich als lineare Verbindungen von speziellen geordneten Kommutatorprodukten darstellen.

I.

Aus einer abzählbaren Menge von Symbolen

$$(x) = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

die ich im folgenden stets als *Unbestimmte* bezeichnen will, bilde man zu jeder natürlichen Zahl $k = 1, 2, 3, \ldots$ die gleichfalls abzählbare

Menge formaler Potenzprodukte

$$x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_k}$$

der Dimension k, worin die Indizes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Nimmt man der Reihe nach für die Dimensionszahl k alle natürlichen Zahlen, so erhält man die (wiederum abzählbare) Menge aller Potenzprodukte beliebiger Dimension in den Unbestimmten der Folge (x), die in einer willkürlichen, für das Weitere festgehaltenen Abzählung mit

$$(X) = X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

bezeichnet werden mögen. Nur dann sollen zwei solche Potenzprodukte als gleich angesehen werden, wenn sie formal übereinstimmen:

$$x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k} = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}$$

nur wenn

$$k = l \quad \text{und} \quad \mu_1 = \nu_1, \ \mu_2 = \nu_2, \dots, \mu_k = \nu_k.$$

Ist in der Folge (X) etwa $X_\alpha = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}$ ein Potenzprodukt der Dimension k und $X_\beta = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}$ ein Potenzprodukt der Dimension l, so läßt sich aus ihnen durch formales Zusammensetzen ein Potenzprodukt $X_\alpha X_\beta$ von der Dimension $k+l$ bilden, das in der Folge (X) etwa als X_γ erscheint:

$$X_\gamma = X_\alpha X_\beta = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}.$$

Man erkennt sogleich, daß es zu einem vorgegebenen Potenzprodukt X_γ nur endlich viele Paare von Potenzprodukten $X_\varkappa, X_\lambda$ gibt, deren formale Zusammensetzung gerade X_γ liefert.

Mit Hilfe der Folge (X) werde nun die (wiederum abzählbare) Menge $\mathfrak{F}$ aller Symbole

$$(1) \qquad f(x) = \varrho_1 X_1 + \varrho_2 X_2 + \varrho_3 X_3 + \dots = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varrho_\alpha X_\alpha$$

gebildet, worin die Koeffizienten ϱ_α ganze Zahlen darstellen, von denen indes stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen.

Jeden Ausdruck $f(x)$ der Gestalt (1) will ich eine *Form* in den Unbestimmten (x) nennen. Kommen in der Darstellung (1) einer Form $f(x)$ noch Potenzprodukte der Dimension k, aber keine Potenzprodukte höherer Dimension als k wirklich vor, so ist $f(x)$ eine *Form der Dimension* k. Ferner will ich für eine Form $f(x)$ auch das Zeichen $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verwenden, um anzudeuten, daß in der Darstellung (1) der Form $f(x)$ die Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ nicht mehr auftreten, wobei aber nicht verlangt werden soll, daß sämtliche Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ in der Form auch wirklich erscheinen.

Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Formen $f(x)$ bildet nun einen Ring der Charakteristik Null, den *Formenring* $\mathfrak{F}$, wenn nachstehende Festsetzungen getroffen werden:

1. Zwei Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha X_\alpha$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\varrho_\alpha = \sigma_\alpha$ für jeden Index α erfüllt ist.

2. Die Summe zweier Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha X_\alpha$ ist erklärt durch

$$f(x) + g(x) = \sum_{\alpha} (\varrho_\alpha + \sigma_\alpha) X_\alpha .$$

3. Das Produkt zweier Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\beta} \sigma_\beta X_\beta$ ist erklärt durch

$$f(x)\, g(x) = \sum_{\gamma} \tau_\gamma X_\gamma \quad \text{mit} \quad \tau_\gamma = \sum \varrho_\alpha \sigma_\beta ,$$

wobei α, β alle Indizespaare durchlaufen, für die $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ ist.

Daß die Menge $\mathfrak{F}$ unter diesen Festsetzungen alle Ringeigenschaften besitzt, erkennt man sehr leicht aus der Bemerkung, daß die Produktbildung nichts anderes darstellt als das formale Ausmultiplizieren der beiden Ausdrücke $f(x)$ und $g(x)$ zu

$$f(x)\, g(x) = \sum_{\alpha, \beta} \varrho_\alpha \sigma_\beta X_\alpha X_\beta ,$$

worin nun noch die Glieder mit gleichen Potenzprodukten $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ zu einem Glied zusammenzufassen sind. Insbesondere ist danach eine Form $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ nur dann die *Nullform* 0 des Ringes $\mathfrak{F}$, wenn für alle Indizes $\varrho_\alpha = 0$ ist.

Eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt weiter *homogen* von der Dimension k, wenn in ihrer Darstellung (1) nur Potenzprodukte der Dimension k in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wirklich auftreten, wenn also in leichtverständlicher Schreibweise für jedes ganze τ die Gleichung

$$f(\tau x_1, \tau x_2, \ldots, \tau x_n) = \tau^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

besteht. Ferner heißt eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogen bezüglich der Unbestimmten* x_λ von der Dimension k_λ mit einem festen λ der Reihe $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, wenn die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau^{k_\lambda} f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n) \tag{3}$$

für jedes ganze τ erfüllt ist. Offenbar ist eine Form homogen, wenn sie bezüglich aller (in ihr wirklich auftretenden) Unbestimmten homogen ist. Eine allgemeine Form $f(x)$ der Dimension k kann stets als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa = 1}^{k} f_\varkappa(x)$$

homogener Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index angegebenen Dimension dargestellt werden; eine ähnliche Zerlegung in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{\varkappa = 0}^{k} f_\varkappa(x)$$

ist aber auch möglich nach Formen $f_\varkappa(x)$, die bezüglich einer der

Unbestimmten x_λ in der durch den Index $\varkappa$ angegebenen Dimension homogen sind, wobei sinngemäß $f_0(x)$ eine Form bezeichnet, für die die Gleichung

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

besteht, in der die Unbestimmte x_λ also nicht wirklich auftritt.

Ist nun $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige, von der Nullform verschiedene Form der Dimension k, ferner $\mathfrak{R}$ ein beliebiger vorgegebener Ring der Charakteristik Null, so stellt für jede Wertereihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ der durch die formale Substitution $x_\lambda \to a_\lambda$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gebildete Ausdruck $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wiederum ein Element des Ringes $\mathfrak{R}$ dar. Ich sage, *im Ringe* $\mathfrak{R}$ *gelte das Gesetz*

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

der Dimension k, *wenn stets, wie auch die Wertereihe* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *aus* $\mathfrak{R}$ *gewählt sein mag, die Gleichung*

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

erfüllt ist.

Ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem wenigstens ein Gesetz der Dimension k, aber kein Gesetz niedrigerer Dimension gilt, heiße *Ring k-ter Stufe*; ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem überhaupt kein Gesetz irgendeiner Dimension gilt, soll als *gesetzloser Ring* bezeichnet werden. Die Existenz gesetzloser Ringe, allgemeiner die Existenz von Ringen jeder Stufe, wird im nächsten Abschnitt nachgewiesen werden.

Jedem in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze $g(x) = 0$ entspricht eine eindeutig bestimmte Form $g(x)$ aus dem Formenring $\mathfrak{F}$, der Gesamtheit aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze daher eine wohlbestimmte Teilmenge $\mathfrak{g}$ des Ringes $\mathfrak{F}$, die kurz als der *Typus* des Ringes $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden soll. Besteht $\mathfrak{g}$ allein aus der Nullform des Ringes $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{R}$ ein gesetzloser Ring, weshalb $\mathfrak{g} = 0$ den Typus jedes gesetzlosen Ringes darstellt. Allgemeiner stellt eine Teilmenge $\mathfrak{g}$, die als Typus eines vorgegebenen Ringes $\mathfrak{R}$ gefunden wurde, den Typus einer Klasse von Ringen dar, deren Mitglieder gemeinsame innere strukturelle Eigenschaften besitzen, die durch die Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ für jede beliebige Form $g(x)$ aus $\mathfrak{g}$ bestimmt werden.

Es ist daher eine erste Aufgabe dieser Untersuchungen, die möglichen Typen $\mathfrak{g}$ festzustellen und durch Vollständigkeitseigenschaften zu kennzeichnen. Zu diesem Zwecke gebe ich im folgenden eine Reihe von Regeln an, die erlauben, aus einem Satze von in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetzen neue, gleichfalls in $\mathfrak{R}$ geltende Gesetze abzuleiten:

1. Sind $g_1(x) \equiv g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$; $g_2(x) \equiv g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ zwei in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze, so gilt mit beliebigen ganzen Zahlen γ_1, γ_2 in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \gamma_1 g_1(x) + \gamma_2 g_2(x) = 0.$$

2. Ist $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, ferner $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{F}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$h_1(x) \equiv h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g(x) f(x) = 0,$$
$$h_2(x) \equiv h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x) g(x) = 0.$$

3. Gilt in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $\gamma g(x) = \gamma g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ mit einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl γ und einer Form $g(x)$ aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) = 0.$$

4. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, sind ferner

$$f_\nu(x) \equiv f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige Formen aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das aus $g(x) = 0$ durch die formale Substitution $x_\nu \to f_\nu(x)$ entstehende Gesetz

$$h(x) \equiv h(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0.$$

Der Beweis dieser vier Regeln bedarf wohl keiner näheren Ausführung.

Für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e tritt hierzu noch die Regel der *formalen partiellen Ableitung:* Zu diesem Zwecke erweitere ich zunächst den Formenring $\mathfrak{F}$ zu dem *erweiterten Formenring* $\mathfrak{F}^*$ mit Einheit e. Man hat dazu nur die Menge $\mathfrak{F}^*$ aller Symbole

$$f^*(x) = \varrho_0 e + f(x)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ zu bilden und folgende Festsetzungen zu treffen:

1. Die Gleichung

$$\varrho_0 e + f(x) = \sigma_0 e + g(x)$$

soll dann und nur dann gelten, wenn $\varrho_0 = \sigma_0$ und $f(x) = g(x)$ ist.

2. Die Summe zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x)) + (\sigma_0 e + g(x)) = (\varrho_0 + \sigma_0) e + (f(x) + g(x)).$$

3. Das Produkt zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x))(\sigma_0 e + g(x)) = \varrho_0 \sigma_0 e + (\varrho_0 g(x) + \sigma_0 f(x) + f(x) g(x)).$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{F}^*$ ein Ring mit der Einheit e.

Werden nun im erweiterten Formenring $\mathfrak{F}^*$ die partiellen Ableitungen von e und x_ν formal erklärt durch

$$\frac{\partial e}{\partial x_\lambda} = 0; \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\nu\lambda} e \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit dem bekannten Kroneckerschen Symbol

$$\delta_{\nu\lambda} = 0 \text{ für } \nu \neq \lambda; \quad \delta_{\nu\nu} = 1 \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so gestatten die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial (f(x)+g(x))}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda}$$

$$\frac{\partial (f(x)\,g(x))}{\partial x_\lambda} = f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda}\,g(x)$$

die Bildung der formalen partiellen Ableitungen nach den Unbestimmten x_λ für jede beliebige erweiterte Form $\varrho_0 e + f(x)$.

Offensichtlich erhält man allgemeiner die höheren partiellen Ableitungen $\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa}$ auch aus der formalen Entwicklung des Ausdruckes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) = f(x) + \xi f_1(x) + \xi^2 f_2(x) + \cdots + \xi^k f_k(x)$$

nach Potenzen der (mit allen Unbestimmten x_λ vertauschbar angenommenen) weiteren Unbestimmten ξ vermittels der Gleichungen

$$\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = \varkappa!\, f_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Unter diesen Festsetzungen gilt für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die nachstehende Regel:

5. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Neben dem Gesetz $g(x) = 0$ gilt nämlich, da $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitzt, bei beliebig gewähltem ganzem ξ auch das Gesetz

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) \equiv g(x) + \xi g_1(x) + \xi^2 g_2(x) + \cdots + \xi^k g_k(x) = 0.$$

Hieraus folgt aber aufgrund der Regel 3 in bekannter Weise durch Wahl von $k+1$ verschiedenen ganzen Werten für ξ die Gültigkeit der Gesetze

$$g(x) = 0, \ g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ \ldots, \ g_k(x) = 0,$$

von denen insbesondere $g_1(x)$ das Gesetz

$$g_1(x) \equiv \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} = 0$$

liefert. Daß der Ausdruck $g_1(x)$ dem Formenring $\mathfrak{F}$ angehört, liegt auf der Hand, da in einem Gesetz $g(x) = 0$ für einen Ring mit Einheit e gewiß keine Potenzprodukte der Dimension 1 auftreten können.

Allgemeiner folgt aus der Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa!}\frac{\partial^\varkappa g(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

und durch Wiederholung des Verfahrens die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n}\,g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\dots\partial x_n^{\varkappa_n}} = 0$$

für jede Reihe nichtnegativer ganzer Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$, die die Bedingung

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n \leqq k$$

erfüllt.

II.

Die beiden ersten Regeln, die zur Bildung neuer Gesetze aus bereits bekannten, in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen angegeben wurden, zeigen, daß der Typus $\mathfrak{g}$ eines Ringes $\mathfrak{R}$ ein (zweiseitiges) Ideal im Formenring $\mathfrak{F}$ ist. Die weiteren Regeln legen die folgenden Definitionen nahe:

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T-Ideal*, wenn es außer den Idealeigenschaften noch die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. Gehört ein Vielfaches $\gamma g(x)$ einer Form $g(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ zu $\mathfrak{a}$, so gehört die Form $g(x)$ selbst zu $\mathfrak{a}$.

2. Gehört die Form $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehört auch die Form

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

zu $\mathfrak{a}$, die aus $g(x)$ durch die formale Substitution

$$x_\nu \to f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mit beliebigen (nicht notwendig zu $\mathfrak{a}$ gehörenden) Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ erhalten wird.

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T*-Ideal*, wenn es ein *T*-Ideal ist und überdies die Eigenschaft besitzt:

3. Gehört die Form $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehören auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\, g(x)}{\partial\, x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

zu $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen findet man sogleich den

Satz 1. *Der Typus* $\mathfrak{g}$ *eines Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist ein T-Ideal und sogar ein T*-Ideal, falls* $\mathfrak{R}$ *eine Einheit e besitzt.*

Die Umkehrung dieses Satzes stellt eine vollständige Lösung des mit diesen Untersuchungen verknüpften Existenzproblems dar. Es gilt nämlich, wie nunmehr gezeigt werden soll, der

Satz 2. *Zu jedem T-Ideal* $\mathfrak{g}$ *des Formenringes* $\mathfrak{F}$ *gibt es einen Ring* $\mathfrak{R}$, *zu jedem T*-Ideal* $\mathfrak{g}$ *des Formenringes* $\mathfrak{F}^*$ *gibt es einen Ring* $\mathfrak{R}$ *mit Einheit e, der den Typus* $\mathfrak{g}$ *besitzt.*

Zum Beweise bilde man, genau entsprechend der Bildung des Formenringes $\mathfrak{F}$ im Abschnitt I, aus einer abzählbaren Menge von Unbestimmten

$$(u) = u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

den Formenring $\mathfrak{U}$ aller Formen

$$f(u) = \varrho_1 U_1 + \varrho_2 U_2 + \varrho_3 U_3 + \cdots = \sum_\alpha \varrho_\alpha U_\alpha$$

in den Potenzprodukten U_α beliebiger Dimension mit ganzzahligen Koeffizienten ϱ_α, von denen stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen. Der Ring $\mathfrak{U}$ ist ein gesetzloser Ring. Wäre nämlich

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein in $\mathfrak{U}$ gültiges Gesetz, so müßte insbesondere die Gleichung

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

gelten, was nur für die Nullform $g(x) \equiv 0$ zutreffen kann.

Auch der erweiterte Formenring $\mathfrak{U}^*$, der von allen Symbolen

$$f^*(u) = \varrho_0 e + f(u)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(u)$ aus $\mathfrak{U}$ gebildet wird, ist gesetzlos, da er ja den Formenring $\mathfrak{U}$ als Teilring enthält.

Nun sei $\mathfrak{g}$ ein beliebiges T-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$; ihm entspricht durch die Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{u}$ des Formenringes $\mathfrak{U}$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ ist dann, wie leicht gezeigt werden kann, ein Ring vom Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form des T-Ideals $\mathfrak{g}$, so ist auch

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$ und daher

$$g(f(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $f_\nu(u)$ des Ringes $\mathfrak{U}$. Mithin gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits im Ringe $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so gilt insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb die Form $g(x)$ zu dem T-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Ist $\mathfrak{g}$ ein T^*-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$, so entspricht ihm in der gleichen Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{u}$ des erweiterten Formenringes $\mathfrak{U}^*$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ ist dann ein Ring mit Einheit und besitzt den Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form aus dem T^*-Ideal $\mathfrak{g}$, so ist, da alle partiellen Ableitungen

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\ldots\partial x_n^{\varkappa_n}} \quad \text{mit} \quad \varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n \leqq k$$

ebenfalls zu $\mathfrak{g}$ gehören, auch der Ausdruck

$$g(\varrho_1 e + x_1,\ \varrho_2 e + x_2,\ \ldots,\ \varrho_n e + x_n)$$

mit beliebigen ganzen Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, folglich auch

$$g(\varrho_1 e + f_1(x),\ \varrho_2 e + f_2(x),\ \ldots,\ \varrho_n e + f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, mithin

$$g(\varrho_1 e + f_1(u),\ \varrho_2 e + f_2(u),\ \ldots,\ \varrho_n e + f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $\varrho_\nu e + f_\nu(u)$ aus $\mathfrak{U}^*$. Daher gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits in $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so ist insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb $g(x)$ zum T^*-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Damit ist der Satz 2 in vollem Umfange bewiesen.

III.

Von besonderer Bedeutung ist für die weiteren Untersuchungen der Begriff der *mehrfach linearen Form*: Aus den ersten n Unbestimmten der Folge (x) lassen sich das spezielle Potenzprodukt

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

und weiter durch Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ insgesamt $n!$ verschiedene Potenzprodukte

$$x^P = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

herstellen. Dann ist auch der Ausdruck

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P \tag{4}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten γ_P, in dem die Summe über alle Permutationen P zu erstrecken ist, eine homogene Form des Formenringes $\mathfrak{F}$

von der Dimension n, die dann und nur dann die Nullform darstellt, wenn alle Zahlen γ_P gleich Null sind. Überdies erfüllt eine Form $L(x)$ dieser Gestalt die Bedingungen

$$(5) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau L(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

bei beliebigem ganzem τ, ist also homogen von der Dimension 1 bezüglich jeder Unbestimmten x_λ. Daher will ich eine solche Form als *mehrfach linear*, genauer als *n-fach linear* bezeichnen. Umgekehrt erkennt man mühelos, daß jede Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{F}$, die den Bedingungen (5) genügt, n-fach linear ist.

Die Tatsache, daß aus einem oder mehreren in einem Ring gültigen Gesetzen mit Hilfe der im Abschnitt I angegebenen Regeln auf mannigfache Weise neue in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze hergeleitet werden können, legt die weitere Frage nahe, ob nicht für jeden Ring Gesetze besonders einfacher Gestalt ausfindig gemacht werden können, aus denen alle weiteren in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze durch diese Regeln sich ableiten lassen. Um eine bequeme und kurze Bezeichnung für diesen Sachverhalt zu haben, nenne ich eine Menge von im Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen *vollständig*, wenn aus diesen durch Anwendung jener Regeln sämtliche in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze hergeleitet werden können, wobei naturgemäß wieder zu unterscheiden sein wird, ob der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit besitzt oder nicht, da im ersten Fall auch die fünfte Regel in Anwendung zu bringen ist.

Eine entscheidende Rolle spielt hierbei der folgende

Satz 3. *Die Menge der in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetze ist vollständig.*

Zum Beweise dieses Satzes zeige ich zunächst, daß alle in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze sich aus den bezüglich der einzelnen Unbestimmten homogenen Gesetzen herleiten lassen. Es genügt, da die Unbestimmten in ihren Rollen vertauscht werden können, dies hinsichtlich der Unbestimmten x_1 nachzuweisen.

Eine Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Dimension k läßt sich als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{k} f_\varkappa(x)$$

von bezüglich der Unbestimmten x_1 homogenen Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index $\varkappa$ gegebenen Dimension darstellen. Gilt nun in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $f(x) = 0$, so gelten auch die Gesetze

$$f(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{k} \tau^\varkappa f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wobei τ beliebige ganzzahlige Werte annehmen darf. Mithin ist schon

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$$

ein Gesetz in $\mathfrak{R}$. Umgekehrt gewinnt man aus diesen Gesetzen durch Summenbildung das ursprüngliche Gesetz.

Für den weiteren Beweisgang verwende ich ein Verfahren, das gestattet, das vorgegebene Gesetz $g(x) = 0$ der Dimension k, das nunmehr homogen bezüglich aller in ihm wirklich auftretenden Unbestimmten angenommen werden darf, durch Einführung weiterer Unbestimmten durch eine Reihe gleichwertiger mehrfach linearer Gesetze zu ersetzen. Hat $g(x) = 0$ bereits bezüglich aller Unbestimmten x_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die Dimension $k_\nu = 1$, so ist $g(x)$ schon selbst mehrfach linear. Daher kann unter Vertauschung oder Umbenennung der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit des Beweises, angenommen werden, daß

$$g(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau^{k_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{mit } k_1 \geqq 2$$

ist. Überdies genügt es, das Verfahren an der Unbestimmten x_1 aufzuzeigen, da es ohne weiteres auch an den anderen Unbestimmten in gleicher Weise durchzuführen ist.

Neben dem Gesetz $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ gilt im Ringe $\mathfrak{R}$ auch das daraus hergeleitete Gesetz

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &= g(x_1 + x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

aus dem insbesondere die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1) &= g(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (2^{k_1} - 2)\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

hervorgeht, die zeigt, daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ nicht Nullform ist, und daß das Gesetz $g(x) = 0$ aus dem Gesetz $f(x) = 0$ durch Identifizierung der Unbestimmten x_1 und x_{n+1} herleitbar ist.

Nun ist $f(x)$ homogen von gleicher Dimension wie die Form $g(x)$; überdies ist $f(x)$ auch bezüglich der Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ homogen von gleicher Dimension wie $g(x)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \\ &\qquad = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &\qquad = g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0, \end{aligned}$$

weshalb in jedem in $f(x)$ auftretenden Potenzprodukt wenigstens einmal x_1 und wenigstens einmal x_{n+1} auftreten muß. Daher besitzt die Form $f(x)$ bezüglich x_1 ebenso wie bezüglich x_{n+1} höchstens die Dimension $k_1 - 1$.

Wird nunmehr das neue Gesetz $f(x) = 0$ nach seinen bezüglich x_1 homogenen Summanden zerlegt, so kann das Verfahren für die Sum-

manden einzeln weiter durchgeführt werden. Nach einer endlichen Kette von Schritten findet man eine Reihe von mehrfach linearen Gesetzen, aus denen umgekehrt das ursprüngliche Gesetz wieder abgeleitet werden kann. Gilt beispielsweise in einem Ringe $\mathfrak{R}$ das Gesetz

$$x_1^3 = 0,$$

so gilt auch das Gesetz

$$(x_1 + x_2)^3 - x_1^3 - x_2^3 = x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

mithin auch die beiden Gesetze

$$x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 = 0; \quad x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

die auseinander durch Vertauschung der Unbestimmten hervorgehen. Der nächste Schritt liefert

$$x_2(x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_3) x_2 (x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2 x_2 - x_2 x_1^2 - x_1 x_2 x_1 - x_1^2 x_2 - x_2 x_3^2 - x_3 x_2 x_3 - x_3^2 x_2 = 0,$$

oder

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 + x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2 + x_3 x_2 x_1 = 0.$$

Mithin ist dieses dreifach lineare Gesetz mit dem ursprünglichen Gesetz völlig gleichwertig.

Auf Grund dieses Satzes können sich nun die weiteren Untersuchungen auf die Behandlung der mehrfach linearen Gesetze eines Ringes $\mathfrak{R}$ beschränken. Daher soll auch im folgenden, sofern nichts anderes angegeben, unter einer Form nur noch eine mehrfach lineare Form, unter einem Gesetz nur noch ein mehrfach lineares Gesetz verstanden werden.

Aus einer n-fach linearen Form

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P = \sum_P \gamma_P (x_1 x_2 \ldots x_n)^P$$

läßt sich durch eine Permutation Q der Unbestimmten eine neue n-fach lineare Form

$$L^Q(x) = \sum_P \gamma_P x^{PQ} = \sum_P \gamma_{PQ^{-1}} x^P$$

gewinnen. Ferner ist jede lineare Verbindung

$$L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

zweier n-fach linearer Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 wiederum eine n-fach lineare Form. Daher bildet die Gesamtheit aller n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*[4]).

[4]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **39** (1935), 696—711; Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **42** (1937), 774—779.

Allgemein nenne ich jede Menge M von n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Enthält M die Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$, so enthält M auch jede Form $L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2.

2. Enthält M ein Vielfaches $\gamma L(x)$ der Form $L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ, so enthält M auch die Form $L(x)$.

3. Enthält M die Form $L(x)$, so enthält M auch die Form $L^P(x)$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten.

Insbesondere bildet bei einer festgewählten n-fach linearen Form

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P,$$

deren ganzzahligen Koeffizienten γ_P teilerfremd sind, die Gesamtheit aller Formen der Gestalt

$$F(x) = \sum_P \alpha_P L^P(x)$$

mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_P, wobei über sämtliche Permutationen der Unbestimmten zu summieren ist, einen symmetrischen Modul, den ich als *den durch die Form $L(x)$ erzeugten symmetrischen Modul* $\mathsf{M}(L(x))$ bezeichne.

Ist M ein beliebiger symmetrischer Modul n-fach linearer Formen, so kann, da der Modul aller n-fach linearen Formen eine linear unabhängige Basis in den $n!$ Formen x^P besitzt, auch für M eine linear unabhängige Basis von Formen $L_\varrho(x)$ (mit $\varrho = 1, 2, \ldots, r$) angegeben werden, derart daß jede Form $L(x)$ des Moduls M eindeutig als lineare Verbindung

$$L(x) = \sum_\varrho \alpha_\varrho L_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_ϱ erhalten werden kann. Insbesondere gelten also Beziehungen der Gestalt

$$L_\varrho^P(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^P L_\sigma(x) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

für jede Permutation P mit ganzen Zahlen $d_{\varrho\sigma}^P$. Da weiter für jedes Paar P, Q von Permutationen hieraus die Gleichungen

$$L_\varrho^{PQ}(x) = \sum_\tau d_{\varrho\tau}^P L_\tau^Q(x) = \sum_{\tau,\sigma} d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q L_\sigma(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^{PQ} L_\sigma(x)$$

folgen, findet man wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis

$$\sum_\tau d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q = d_{\varrho\sigma}^{PQ}$$

oder

$$D(P)\,D(Q) = D(PQ)$$

für die r-reihigen ganzzahligen Matrizen

$$D(P) = (d_{\varrho\sigma}^P) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r).$$

Jeder symmetrische Modul M n-fach linearer Formen liefert demnach eine *Darstellung der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen[5]).

Der Satz von der vollständigen Zerlegbarkeit endlicher Matrixgruppen sowie die Tatsache, daß jede Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen in absolut unzerlegbare, gleichfalls ganzzahlige Bestandteile zerlegt werden kann, führen sogleich auf einige Aussagen über symmetrische Moduln n-fach linearer Formen, die ich ohne nähere Begründung nachstehend angebe[6]):

1. Ist M_1 ein symmetrischer Teilmodul des symmetrischen Moduls M, so gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M_2 von M, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2.$$

2. Jeder symmetrische Modul M ist als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \cdots + \mathsf{M}_k$$

unzerlegbarer symmetrischer Teilmoduln darstellbar.

3. Ein symmetrischer Modul M ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn er keinen symmetrischen Teilmodul enthält.

4. Ein unzerlegbarer symmetrischer Modul M wird durch jede von Null verschiedene, in ihm enthaltene n-fach lineare Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ erzeugt, deren Koeffizienten γ_P teilerfremd sind:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Diese Aussage kann, was für die weiteren Betrachtungen besonders wichtig ist, in folgender Weise auf beliebige symmetrische Moduln ausgedehnt werden:

5. Zu jedem symmetrischen Modul M kann eine erzeugende Form $L(x)$ angegeben werden:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Da nämlich der Modul Γ aller n-fach linearen Formen den Modul M als Teilmodul enthält, gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M^*, so daß in direkter Zerlegung

$$\Gamma = \mathsf{M} + \mathsf{M}^*$$

ist. Mithin läßt sich jede Form $L(x)$, insbesondere also das Potenzprodukt $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eindeutig als Summe einer Form $F(x)$ aus M und einer Form $G(x)$ aus M^* darstellen:

$$x = F(x) + G(x) \quad \text{mit} \quad F(x) \in \mathsf{M};\ G(x) \in \mathsf{M}^*.$$

---

[5]) Vgl. die in [4]) angegebenen Arbeiten.

[6]) Für alle allgemeinen darstellungstheoretischen Dinge vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, 17. Kapitel, Berlin Jul. Springer 1931.

Daraus findet man für eine beliebige Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ die Darstellung

$$L(x) = \sum_P \gamma_P (F(x) + G(x))^P = \sum_P \gamma_P F^P(x) + \sum_P \gamma_P G^P(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

mit zwei Formen

$$L_1(x) \in \mathsf{M}(F(x)) < \mathsf{M}; \quad L_2(x) \in \mathsf{M}(G(x)) < \mathsf{M}^*.$$

Ist also $L(x)$ insbesondere eine Form aus M, so ist die Form $L(x) - L_1(x) = L_2(x)$ sowohl in M als auch in M^* enthalten. Daher ist

$$L_2(x) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad L(x) = \sum_P \gamma_P F^P(x).$$

Jede Form des Moduls M gehört demnach dem Modul $\mathsf{M}(F(x))$ an:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(F(x)).$$

Die Bedeutung dieser Tatsachen für die Untersuchung der Gesetze in einem Ringe $\mathfrak{R}$ erhellt nun sogleich aus der folgenden, leicht zu beweisenden Bemerkung:

Satz 4. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Modul.*

Gilt nämlich in $\mathfrak{R}$ das n-fach lineare Gesetz $\gamma L(x) = 0$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ und einer (n-fach linearen) Form $L(x)$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz $L(x) = 0$; gelten in $\mathfrak{R}$ die beiden n-fach linearen Gesetze $L_1(x) = 0$ und $L_2(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2 auch das Gesetz $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) = 0$; gilt in $\mathfrak{R}$ schließlich das n-fach lineare Gesetz $L(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten auch das Gesetz $L^P(x) = 0$.

Daraus kann aber unter Beachtung der letzten Bemerkung über symmetrische Moduln sogleich das folgende Ergebnis entnommen werden:

Satz 5. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze lassen sich aus einem einzigen n-fach linearen Gesetz*

$$L_n(x) = 0$$

herleiten und in der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \alpha_P L_n^P(x) = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_P darstellen.

Wie bereits früher angegeben wurde, lassen sich aus einem in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz stets auch Gesetze höherer Dimension herleiten. Daher ist nun noch festzustellen, unter welchen Bedingungen die angegebenen Verfahren wiederum auf mehrfach lineare Gesetze führen. Man erkennt leicht, daß im wesentlichen, d. h. abgesehen von Permutation der Unbestimmten, Bildung linearer Verbindungen mit ganzzahligen Koeffizienten und Wiederholung der Verfahren, hierfür die folgenden Regeln zur Verfügung stehen:

Satz 6. *Ist* $L_n(x) = L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *ein in* $\mathfrak{R}$ *gültiges n-fach lineares Gesetz, so sind*

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1} = 0,$$
$$x_{n+1} \cdot L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}) = 0$$

gleichfalls in $\mathfrak{R}$ *gültige* $(n+1)$*-fach lineare Gesetze.*

Somit bestehen neben n-fach linearen Gesetzen in einem Ring stets auch mehrfach lineare Gesetze jeder höheren Dimension. Damit erhält man:

Satz 7. *Für jeden Ring* $\mathfrak{R}$ *k-ter Stufe läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0, \ldots, L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch den Index angegebenen Dimension angeben, aus denen alle anderen, in $\mathfrak{R}$ *gültigen Gesetze herleitbar sind.*

Die in diesem Satze angegebene Kette von Gesetzen für einen Ring k-ter Stufe ist zwar vollständig in dem früher angegebenen Sinne, da jedes im Ring gültige Gesetz aus den Gesetzen der Kette herleitbar ist, die Gesetze der Kette sind indes nicht notwendig unabhängig voneinander, da der Modul $\mathsf{M}(L_n(x))$ aller n-fach linearen Gesetze auch alle Gesetze enthält, die aus den vorangehenden Gliedern der Kette durch Anwendung des Satzes 6 gewonnen werden können. Eine weitere Reduktion der Kette läßt sich auf folgende Weise durchführen:

Alle aus den mehrfach linearen Gesetzen der Kette

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0, \ldots, L_{n-1}(x) = 0$$

durch den Satz 6 herleitbaren n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Teilmodul M'_n des Moduls $\mathsf{M}(L_n(x))$; zu ihm kann ein ergänzender Teilmodul M''_n angegeben werden, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M}(L_n(x)) = \mathsf{M}'_n + \mathsf{M}''_n = \mathsf{M}(L'_n(x)) + \mathsf{M}(L''_n(x)),$$

wenn $L'_n(x)$ und $L''_n(x)$ erzeugende Formen der Moduln M'_n und M''_n bezeichnen. Die Gesetze des Moduls M''_n, also die Gesetze der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \gamma_P L''^P_n(x) = 0,$$

die in $\mathfrak{R}$ gelten, lassen sich dann auf keine Weise aus den in $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten, da M'_n und M''_n zueinander fremd sind, wobei unter Umständen der Modul M''_n sogar leer sein kann, nämlich dann, wenn alle n-fach linearen Gesetze sich bereits aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten lassen. Somit gilt der

Satz 8. *Für jeden Ring* $\mathfrak{R}$ *k-ter Stufe läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k_1}(x) = 0,\ L_{k_2}(x) = 0, \ldots, L_{k_n}(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Kein Gesetz des Moduls* $\mathsf{M}(L_{k_n}(x))$ *ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension ableitbar.*

2. *Jedes Gesetz des Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Hierin ist stillschweigend der Fall miteingeschlossen worden, daß die reduzierte Kette mehrfach linearer Gesetze abbricht, also nur aus endlich vielen Gliedern besteht. Ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlicher reduzierter Kette mehrfach linearer Gesetze gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes mit Notwendigkeit abbricht, habe ich bisher nicht entscheiden können. Die Beantwortung dieser Frage scheint sehr schwierig zu sein.

In diesem Zusammenhang will ich als Ergänzung zu Satz 2 noch zeigen, daß bereits der Ring $\mathfrak{U}_2$ aller Formen $f(u_1, u_2)$ des Formenrings $\mathfrak{U}$, also der Ring aller Formen aus $\mathfrak{U}$, in denen nur die ersten beiden Unbestimmten u_1, u_2 wirklich auftreten, ein gesetzloser Ring ist.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte in $\mathfrak{U}_2$ auch ein mehrfach lineares Gesetz, etwa

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P = 0 \quad \text{mit} \quad x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

gelten. Dann müßte auch für $x_\nu = u_1^\nu u_2$ (mit $\nu = 1, 2, \ldots, n$) die Gleichung

$$L(u_1 u_2, u_1^2 u_2, \ldots, u_1^n u_2) = \sum_P \gamma_P (u_1 u_2 u_1^2 u_2 \ldots u_1^n u_2)^P = 0$$

oder

$$\sum_P \gamma_P u_1^{\alpha_1} u_2 u_1^{\alpha_2} u_2 \ldots u_1^{\alpha_n} u_2 = 0 \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bestehen, was offenbar nur möglich ist, wenn alle γ_P verschwinden.

IV.

Die bisherigen allgemeinen Ergebnisse lassen sich weitgehend vertiefen, wenn die Forderung gestellt wird, daß der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitze. Wesentliche Ursache dieser Verschärfung und Ergänzung der Ergebnisse ist die bereits früher angegebene Tatsache, daß sich durch das Verfahren der partiellen Ableitung unter Umständen aus mehrfach linearen Gesetzen auch Gesetze niedrigerer Dimension herleiten lassen. Nun gilt für eine n-fach lineare Form $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wie man sich leicht überlegt, die Gleichung

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, e, x_{\nu+1}, \ldots, x_n).$$

Daher läßt sich im Falle des mehrfach linearen Gesetzes, den wir allein noch zu beachten haben, die fünfte Regel des Abschnittes I auf die folgende Regel zurückführen:

5. Ist $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e gültiges Gesetz, so ist auch

$$L^*(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, e) = 0$$

ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz.

Ich werde indes trotz diesem recht einfachen Sachverhalt in der Folge die Bezeichnung durch partielle Ableitungen als bequeme Schreibweise beibehalten.

Nach dem Verhalten der partiellen Ableitungen werden die mehrfach linearen Formen in zwei Arten unterschieden: Eine n-fach lineare Form $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heiße *eigentlich* n-fach linear, wenn alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu}$ Nullformen sind, im anderen Falle *uneigentlich* n-fach linear. Die gleiche Unterscheidung werde auch für mehrfach lineare Gesetze getroffen. Eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ ist demgemäß durch die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gekennzeichnet.

Gilt in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e das eigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x) = 0$, so ist auch das (gleichfalls in $\mathfrak{R}$ gültige) Gesetz $L^P(x) = 0$ bei beliebiger Permutation P eigentlich n-fach linear. Weiter ist die Form $L(x)$ gewiß eigentlich n-fach linear, wenn irgendein Vielfaches $\gamma L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ eigentlich n-fach linear ist. Das Entsprechende gilt schließlich für jede lineare Verbindung $L(x) \equiv \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) = 0$ zweier in $\mathfrak{R}$ gültiger eigentlich n-fach linearer Gesetze $L_1(x) = 0$, $L_2(x) = 0$ bei beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2. Daher bilden die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden eigentlich n-fach linearen Gesetze für sich einen symmetrischen Modul.

Die Bedeutung der hier gemachten Unterscheidung erhellt aus dem nachstehenden

Satz 9. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden uneigentlich n-fach linearen Gesetze lassen sich aus den in $\mathfrak{R}$ geltenden eigentlich ν-fach linearen Gesetzen (mit $2 \leqq \nu \leqq n$) herleiten.*

Zum Beweise wird ein doppeltes Induktionsverfahren benötigt: Ist der vorgegebene Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e etwa k-ter Stufe, so ist jedes in $\mathfrak{R}$ gültige k-fach lineare Gesetz gewiß eigentlich k-fach linear, da andernfalls ein $(k-1)$-fach lineares Gesetz für $\mathfrak{R}$ daraus hergeleitet werden könnte. Mithin kann die Behauptung des Satzes für Gesetze niedrigerer Dimension als n bereits für bewiesen angenommen werden, weshalb es zum Beweise völlig ausreicht zu zeigen, daß ein uneigent-

lich n-fach lineares Gesetz in $\mathfrak{R}$ aus den eigentlich n-fach linearen und den Gesetzen niedrigerer Dimension hergeleitet werden kann.

Liegt in $\mathfrak{R}$ das uneigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ vor, so kann weiter, nach etwaiger Permutation der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Gültigkeit des Verfahrens, vorausgesetzt werden, daß für die partiellen Ableitungen von $L(x)$ die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0: \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \not\equiv 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+2}} \not\equiv 0; \cdots; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \not\equiv 0.$$

Dann gelten neben $L(x) = 0$ in $\mathfrak{R}$ auch die beiden Gesetze

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0,$$

also auch das Gesetz

$$G(x) \equiv G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv L(x) - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0.$$

Ist dabei $G(x)$ die Nullform, so ist

$$L(x) \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1},$$

also das Gesetz $L(x) = 0$ aus dem $(n-1)$-fach linearen, in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0$ herleitbar. Ist aber $G(x)$ nicht die Nullform, so gelten in $\mathfrak{R}$ die Gesetze

$$G(x) = 0: \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0,$$

aus denen wiederum das Gesetz $L(x) \equiv G(x) + \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0$ hergeleitet werden kann. Für die Ableitungen $\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda}$ mit $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$ findet man

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_\lambda} \cdot x_{\nu+1} \equiv 0,$$

ferner ist

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}^2} \cdot x_{\nu+1} - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot e \equiv 0,$$

so daß die Form $G(x)$ gewiß die Bedingungen

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0$$

erfüllt. Durch Fortführung dieses Verfahrens erhält man demnach nach höchstens n Schritten ein eigentlich n-fach lineares Gesetz, aus dem mit Hilfe von Gesetzen niedrigerer Dimension das ursprüngliche Gesetz $L(x) = 0$ wieder hergeleitet werden kann.

Als Regeln für die Bildung eigentlich mehrfach linearer Gesetze höherer Dimension können hier aufgestellt werden:

1. Ist $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ geltendes eigentlich n-fach lineares Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die eigentlich $(n+1)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1} - x_{n+1} \cdot L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$L_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1} - x_{n+1} x_n) = 0.$$

2. Ist $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ gültiges eigentlich n-fach lineares Gesetz, ferner $L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ eine beliebige eigentlich n-fach lineare Form in den Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die beiden eigentlich $(n+m)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = 0,$$
$$L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})\, L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

sowie das eigentlich $(n+m-1)$-fach lineare Gesetz

$$L_1(L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}), x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Entsprechende, auf diese Verfahren sich stützende Überlegungen wie die, die zu den Sätzen 7 und 8 führten, ergeben hier die nachstehenden Sätze:

Satz 10. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0, \; L_{k+1}(x), \ldots, \; L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_n(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Satz 11. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0, \; L_{k_1}(x) = 0, \ldots, \; L_{k_n}(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < \cdots < k_n < \cdots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_{k_n}(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Kein Gesetz des Moduls $\mathsf{M}(L_{k_n}(x))$ ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleitbar.*
3. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Auch in diesem Falle habe ich nicht entscheiden können, ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlich langer, reduzierter Kette aus eigentlich mehrfach linearen Gesetzen gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes im Endlichen abbricht.

Sehr leicht zu beweisen ist dagegen die folgende interessante Bemerkung:

Satz 12. *Besitzt ein Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e eine im Endlichen abbrechende reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0, \quad L_{k_1}(x) = 0, \ldots, \quad L_{k_n}(x) = 0$$

mehrfach linearer Gesetze, so gibt es ein Fundamentalgesetz $G(x) = 0$ (der Dimension k_n), aus dem sämtliche in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze hergeleitet werden können.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß für Ringe mit Einheit e die Gesetze

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{und} \quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x_{n+1} = 0$$

völlig gleichwertig sind, so daß alle Gesetze der reduzierten Kette auch durch höherdimensionale Gesetze ersetzt werden können. Ersetzt man sie demgemäß durch k_n-fach lineare Gesetze, so lassen sich diese Gesetze gleicher Dimension nach früherem durch ein einziges ersetzen.

V.

Für die Aufstellung der in einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden Gesetze ist nach Satz 9 die Kenntnis der eigentlich n-fach linearen Gesetze von besonderer Bedeutung, andererseits aber auch völlig ausreichend.

Wie bereits gezeigt wurde, bildet die Menge der eigentlich n-fach linearen Formen einen symmetrischen Modul Γ_n^*, also einen Teilmodul des symmetrischen Moduls Γ_n aller n-fach linearen Formen. Eine eingehende Untersuchung des Moduls Γ_n^* soll den Inhalt der letzten beiden Abschnitte ausmachen.

Ich beginne mit der Angabe der linearen Bedingungen für die Koeffizienten einer eigentlich n-fach linearen Form, die sich bei Einführung der (als Zykeln dargestellten) speziellen Permutationen

$$V_1 = (1), \quad V_2 = (12), \quad V_3 = (123), \ldots, \quad V_n = (123 \ldots n)$$

in einfacher Gestalt zusammenfassen lassen:

Satz 13. *Eine n-fach lineare Form*

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$$

ist dann und nur dann eigentlich n-fach linear, wenn für alle Permutationen P die linearen Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{V_\nu P} = 0 \tag{6}$$

erfüllt sind.

Für den Gang des Beweises bezeichne ich die Inverse V_ν^{-1} auch mit U_ν (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Ferner setze ich aus Zweckgründen $\gamma_P = \gamma(P)$.

Die vorgegebene Form $L(x)$ kann auch in der Gestalt

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_n^\nu R}$$

dargestellt werden, wenn R alle Permutationen durchläuft, die die Ziffer n festlassen. Die Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda}$ der Form $L(x)$ wird dann

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R) \frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_\lambda}.$$

Um ihre Gestalt genauer angeben zu können, kommt es daher darauf an festzustellen, in welche Potenzprodukte die Produkte $x^{U_n^\nu R}$ bei partieller Ableitung nach der Unbestimmten x_λ, also bei der Substitution $x_\lambda \to e$ übergehen, wobei es ausreichen wird, den Fall $\lambda = n$ allein zu betrachten.

Nun gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$U_n^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu & \nu+1 & \cdots & n-1 & n \\ n-\nu+1 & n-\nu+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & n-\nu-1 & n-\nu \end{pmatrix},$$

also bei

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

offenbar

$$U_n^\nu R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \cdots & \alpha_{n-1} & n & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-\nu-1} & \alpha_{n-\nu} \end{pmatrix}.$$

Mithin ist

$$x^{U_n^\nu R} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_n x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}},$$

$$\frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_n} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}}.$$

Dieses Potenzprodukt aber entsteht aus dem Potenzprodukt $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ durch Anwendung der Permutation

$$U_{n-1}^{\nu-1} R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-\nu} & n \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \cdot x_n = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_{n-1}^{\nu-1} R} = \sum_{R} \sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R)\, x^R.$$

Ist also, wie nun vorausgesetzt werden soll,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0,$$

so gilt die lineare Beziehung

$$\sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = 0$$

für alle Permutationen R, die die Ziffer n festlassen. Umgekehrt folgt aus diesen Bedingungen für die Koeffizienten der Form $L(x)$ sogleich

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0$$

für die partielle Ableitung nach der Unbestimmten x_n.

Die weiteren Bedingungen für eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ erhält man aus der Tatsache, daß mit $L(x)$ auch jede Form $L^Q(x)$ eigentlich n-fach linear ist. Insbesondere gilt also $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} \equiv 0$ für die partielle Ableitung von $L(x)$ nach der Unbestimmten x_λ dann und nur dann, wenn $\frac{\partial L^Q(x)}{\partial x_n} \equiv 0$ bei $Q = U_n^\lambda$ für die partielle Ableitung der Form $L^{U_n^\lambda}(x)$ nach der Unbestimmten x_n erfüllt ist. Nun gilt aber

$$L^{U_n^\lambda}(x) = \sum_P \gamma(P)\, x^{PU_n^\lambda} = \sum_S \gamma(SU_n^{-\lambda})\, x^S = \sum_S \gamma_\lambda(S)\, x^S .$$

Soll für diese Form die partielle Ableitung nach x_n die Nullform sein, müssen nach dem eben Gezeigten die linearen Beziehungen

$$\sum_\nu \gamma_\lambda(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = \sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R\, U_n^{-\lambda}) = 0$$

für alle Permutationen R bestehen, die die Ziffer n festlassen. Da indes $R\,U_n^{-\lambda}$ alle Permutationen durchläuft, wenn $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, findet man die Bedingungen

$$\sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} P) = 0$$

für alle Permutationen P. Durch die Gleichung

$$U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} = V_\nu U_n \tag{7}$$

gehen diese Gleichungen über in

$$\sum_\nu \gamma(V_\nu U_n P) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_\nu \gamma(V_\nu P) = 0$$

für alle Permutationen P in Übereinstimmung mit der Aussage des Satzes 13.

Die Gleichung (7) ist für $\nu = 1$ offenbar erfüllt. Durch vollständige Induktion findet man weiter

$$U_n^{\nu+1} U_{n-1}^{-\nu} = U_n (U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1})\, U_{n-1}^{-1} = U_n V_\nu U_n U_{n-1}^{-1} = V_{\nu+1} U_n ,$$

wie man unmittelbar nachrechnet.

Der Rang des Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen wird durch den folgenden Satz angegeben:

Satz 14. *Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* ist*

$$R_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right). \tag{8}$$

Für den Beweis benötige ich vorübergehend den Begriff des *linearen Moduls*: Darunter verstehe ich eine Menge n-fach linearer Formen, der mit zwei Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ bei beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 stets auch die Form $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$, mit einem Vielfachen $\alpha L(x)$ einer n-fach linearen Form $L(x)$ bei von 0 verschiedenem α stets auch die Form $L(x)$ selbst angehört.

Für jedes ν der Reihe $\nu = 1, 2, \ldots, n$ bezeichne Λ_ν die Menge aller n-fach linearen Formen $L(x)$, deren partiellen Ableitungen nach den ersten ν Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ Null sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Insbesondere ist Λ_n die Menge aller eigentlich n-fach linearen Formen. Weiter sei Λ_0 die Menge aller n-fach linearen Formen.

Alle Mengen Λ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sind lineare Moduln, besitzen daher einen linearen Rang $R_\nu(n)$. Die Zahl $R_n = R_n(n)$ soll bestimmt werden, der Rang $R_0(n)$ des Moduls Λ_0 ist $R_0(n) = n!$.

Nun sei $L(x)$ eine Form aus Λ_ν für irgend ein festes ν, es sei also

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Bildet man noch die partielle Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und setzt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x) ,$$

so gelten für die Formen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und $F(x)$, da $L(x)$ zu Λ_ν gehört:

$$\frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_1} \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_\nu} \equiv 0 , \tag{9}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0 . \tag{10}$$

Mithin ist $F(x)$ eine Form aus $\Lambda_{\nu+1}$.

Die Darstellung der Form $L(x)$ aus Λ_ν in der Gestalt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x)$$

mit einer Form $F(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$ ist dabei eindeutig. Denn wäre etwa auch

$$L(x) = x_{\nu+1} G^*(x) + F^*(x)$$

mit einer Form $F^*(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$, so würde folgen

$$x_{\nu+1} \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x) \right) + F(x) - F^*(x) \equiv 0$$

und daher durch die Substitution $x_{\nu+1} \to e$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x) \equiv 0 ,$$

also auch

$$F(x) - F^*(x) \equiv 0 .$$

Der lineare Modul Λ_ν läßt sich demnach aufspannen durch den linearen Modul $\Lambda_{\nu+1}$ und den linearen Modul Λ_ν^* aller Formen der Gestalt $x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$, die (9) erfüllen. Der Rang dieses Moduls Λ_ν^* ist offenbar $R_\nu(n-1)$.

Mithin erhält man die Beziehung

$$R_\nu(n) = R_\nu(n-1) + R_{\nu+1}(n) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

weshalb die Rangzahlen $R_\nu(n)$ sich aus den Werten $R_0(n)$ durch Differenzenbildung gewinnen lassen. Insbesondere findet man für $R_n = R_n(n)$ den Ausdruck

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)! = n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} ,$$

wie in (8) angegeben worden war.

Beispielsweise ist

$$R_2 = 1, \quad R_3 = 2, \quad R_4 = 9, \quad R_5 = 44, \quad R_6 = 265, \quad R_7 = 1854.$$

Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* stimmt übrigens überein mit der Anzahl der *echten* Permutationen in n Ziffern, d. h. der Permutationen, die keine Ziffer ungeändert lassen. Die Ursache dieser Übereinstimmung werden die weiteren Betrachtungen erkennen lassen.

VI.

Über die Gestalt der eigentlich n-fach linearen Formen können nähere Angaben gemacht werden, vor allem aber läßt sich eine linear unabhängige Basis für den Modul Γ_n^* aufstellen, die aus Formen sehr einfachen Aufbaus besteht. Zur bequemeren Darstellung dieser Formen empfiehlt es sich, die *höheren Kommutatoren* einzuführen: Ist

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$$

eine beliebige Anordnung der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so werde

$$[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} - x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}$$

und weiter für $2 \leqq r \leqq n$

$$(11) \quad [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}] = [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}] x_{\alpha_r} - x_{\alpha_r} [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}]$$

gesetzt. Offenbar verschwindet jeder dieser Ausdrücke, wenn irgendeine in ihnen vorkommende Unbestimmte durch die Einheit des Ringes ersetzt wird. Daher ist auch jedes für irgendeine Zerlegung

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s \qquad (n_\sigma \geqq 2;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

gebildete *Kommutatorprodukt*

$$(12) \qquad K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$$
$$= [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n_1}}][x_{\alpha_{n_1+1}}, x_{\alpha_{n_1+2}}, \dots, x_{\alpha_{n_1+n_2}}] \dots [x_{\alpha_n - n_s+1}, x_{\alpha_n - n_s+2}, \dots, x_{\alpha_n}]$$

eine eigentlich n-fach lineare Form.

Unter den möglichen Kommutatorprodukten werde nun eine Anzahl ausgezeichnet, die als *normierte Kommutatorprodukte* bezeichnet werden sollen:

Ein Kommutatorprodukt der Gestalt (12) heißt normiert, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Kommutatorlängen $n_1, n_2, \dots, n_s$ sind der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s \geqq 2.$$

2. Die erste Unbestimmte jedes Kommutators besitzt den kleinsten Index unter allen in ihm vorkommenden Unbestimmten.

3. Kommutatoren gleicher Länge stehen in der Reihenfolge, daß die Indizes der jeweils ersten Unbestimmten der Größe nach zunehmen.

Als Beispiel gebe ich die normierten Kommutatorprodukte in 4 Unbestimmten an. Für die Zerlegung $4 = 4$ findet man 6 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2, x_3, x_4], \quad [x_1, x_3, x_4, x_2], \quad [x_1, x_4, x_2, x_3],$$
$$[x_1, x_3, x_2, x_4], \quad [x_1, x_2, x_4, x_3], \quad [x_1, x_4, x_3, x_2],$$

da die Unbestimmte x_1 stets an erster Stelle stehen muß, während die weiteren Unbestimmten keinen Bedingungen unterliegen. Für die Zerlegung $4 = 2 + 2$ findet man 3 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2][x_3, x_4], \quad [x_1, x_3][x_2, x_4], \quad [x_1, x_4][x_2, x_3],$$

da auch hier die Unbestimmte x_1 im ersten Kommutator stets an erster Stelle stehen muß, während der Index der im zweiten Kommutator an erster Stelle stehenden Unbestimmten stets kleiner als der Index der an zweiter Stelle stehenden Unbestimmten sein muß.

Unter diesen Festsetzungen und Bezeichnungen gilt der

Satz 15. *Die normierten Kommutatorprodukte in n Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilden eine linear unabhängige Basis des symmetrischen Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen.*

Um den Beweis dieses Satzes durchsichtiger zu gestalten, will ich ihn in folgenden drei Schritten durchführen:

1. Die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte ist gleich dem Rang des Moduls Γ_n^*, also gleich der Anzahl der echten Permutationen.

2. Jede eigentlich n-fach lineare Form läßt sich als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

3. Jedes Kommutatorprodukt läßt sich als lineare Verbindung von normierten Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

Erster Schritt: Jede Permutation P läßt sich bekanntlich in ziffernfremde Zykeln zerlegen:

$$(13)\quad P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})(\alpha_{n_1+1}, \alpha_{n_1+2}, \ldots, \alpha_{n_1+n_2}) \ldots (\alpha_{n-n_s+1}, \alpha_{n-n_s+2}, \ldots, \alpha_n).$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, läßt sich indes durch die folgenden Bedingungen normieren:

a) Die Zykellängen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ seien der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$$

b) Die Anfangsziffer jedes Zyklus sei die kleinste im Zyklus vorkommende Ziffer.

c) Die Zykeln gleicher Länge seien derart angeordnet, daß ihre Anfangsziffern der Größe nach zunehmen.

Eine nach diesen Bedingungen geordnete Zykelndarstellung einer Permutation ist vollständig eindeutig. Dabei gilt für eine echte Permutation insbesondere

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \geqq 2\,.$$

Damit erkennt man aber, daß diese Normierungsbedingungen für die Zykelndarstellung einer echten Permutation völlig den oben angegebenen Normierungsbedingungen der normierten Kommutatorprodukte entsprechen. Mithin ist jeder echten Permutation P in der Darstellung (13) umkehrbar eindeutig ein normiertes Kommutatorprodukt (12) zugeordnet. Also stimmt auch die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte mit der Anzahl der echten Permutationen, also auch mit dem Rang R_n des Moduls Γ_n^* überein.

Zweiter Schritt: Der Beweis für die Behauptung, daß jede eigentlich n-fach lineare Form als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten dargestellt werden kann, gründet sich auf die Gleichung

$$x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$[x_1, x_2]\, x_3 \ldots x_n + x_2 [x_1, x_3]\, x_4 \ldots x_n + \cdots + x_2 x_3 \ldots x_{n-1} [x_1, x_n] + x_2 x_3 \ldots x_n x_1\,,$$

die zeigt, auf welche Weise jeder Faktor eines Potenzproduktes unter Bildung von Kommutatoren auf die rechte Seite des Potenzproduktes gezogen werden kann. Mit ihrer Hilfe kann jede Form $L(x)$ als Summe

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot x_1$$

dargestellt werden, wobei $F_1(x)$ die Unbestimmte x_1 nur noch in Kommutatoren $[x_1, x_\nu]$ enthält. Daher ist

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \equiv 0\,,$$

so daß

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

folgt. Ist demnach $L(x)$ eigentlich n-fach linear, so ist $\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} = 0$ und weiter

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wendet man das gleiche Verfahren auf die Unbestimmte x_2 an, so erhält man wiederum unter Beachtung der Gleichung

$$[x_1, x_\nu, x_2] \equiv [x_1, x_\nu] x_2 - x_2 [x_1, x_\nu]$$

eine Darstellung der Form $L(x)$ in der Gestalt

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) x_2,$$

wobei aber in $G_1(x)$ die beiden Unbestimmten x_1, x_2 nur noch in Kommutatoren auftreten. Mithin ist auch hier, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

also

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_3, \ldots, x_n).$$

Damit ist das Verfahren wohl hinreichend genau geschildert. Nach höchstens n Schritten erhält man eine Darstellung von $L(x)$ als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist.

Dritter Schritt: Der Schluß des Beweisganges stützt sich auf eine Kommutatorbeziehung, die den Kommutator von Kommutatoren als lineare Verbindung von Kommutatoren darstellt. Sind

$$y_1, y_2, \ldots, y_r; \quad z_1, z_2, \ldots, z_s$$

zwei Reihen von Unbestimmten, so schreibe man bei beliebigen Permutationen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s \end{pmatrix}$$

für die Kommutatoren zur Abkürzung

$$[y^R] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}]; \quad [y^R, z^S] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}, z_{\beta_1}, z_{\beta_2}, \ldots, z_{\beta_s}].$$

Dann gilt der

Satz 16. *Ist der Kommutator* $[z] = [z_1, z_2, \ldots, z_s]$ *nach Potenzprodukten entwickelt*

$$[z] = \sum_S \gamma_S z^S,$$

worin über alle Permutationen S *in* s *Ziffern* $1, 2, \ldots, s$ *zu summieren ist, so gilt die Kommutatorbeziehung*

$$[[y], [z]] = [y][z] - [z][y] = \sum_S \gamma_S [y, z^S]. \tag{14}$$

Der Beweis dieses Satzes benötigt ein doppeltes Induktionsverfahren: Zunächst gilt für $r = s = 2$

$$\begin{aligned}
&[y_1, y_2]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\,z_1 z_2 - [y_1, y_2]\,z_2 z_1 - z_1 z_2 [y_1, y_2] + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\,z_1 z_2 - z_1 [y_1, y_2]\,z_2 - z_2 [y_1, y_2]\,z_1 + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&\qquad - [y_1, y_2]\,z_2 z_1 + z_2 [y_1, y_2]\,z_1 + z_1 [y_1, y_2]\,z_2 - z_1 z_2 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2, z_1, z_2] - [y_1, y_2, z_2, z_1]\,.
\end{aligned}$$

Daher kann die Formel (14) für festes r und $s = 2$ als bewiesen angenommen werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
&[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}] \\
&= [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2] - [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_2, z_1]
\end{aligned}$$

eine formale Identität in den Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2$, weshalb sie auch gilt für die Substitution

$$x_2 = [y_1, y_2],\ x_3 = y_3, \ldots, x_{r+1} = y_{r+1},$$

woraus sogleich wegen

$$[[y_1, y_2], y_3, \ldots, y_{r+1}] = [y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}]$$

die Formel (14) für $r+1$ und $s = 2$ folgt. Damit ist (14) bewiesen für beliebiges r bei $s = 2$.

Demnach kann im Weiteren die Gültigkeit von (14) bei beliebigem r und festem s als bekannt vorausgesetzt werden, so daß hieraus nur noch ihre Gültigkeit für r und $s+1$ bewiesen werden muß. Nun gilt für den Kommutator $[z]$ die Gleichung

$$[z_1, z_2, \ldots, z_s, z_{s+1}] = [z]\,z_{s+1} - z_{s+1}[z]\,,$$

weshalb die zu beweisende Identität auch in der Gestalt

$$[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] = \sum_S \gamma_S([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S])$$

mit den früheren Bezeichnungen geschrieben werden kann. Für den linksstehenden Ausdruck erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
&[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] \\
&= [y]\,[z]\,z_{s+1} - [y]\,z_{s+1}[z] - [z]\,z_{s+1}[y] + z_{s+1}[z]\,[y] \\
&= ([y]\,[z] - [z]\,[y])\,z_{s+1} - z_{s+1}([y]\,[z] - [z]\,[y]) - ([y, z_{s+1}]\,[z] - [z]\,[y, z_{s+1}]),
\end{aligned}$$

also nach (14)

$$\begin{aligned}
[[y], [z, z_{s+1}]] &= \sum_S \gamma_S [y, z^S]\,z_{s+1} - \sum_S \gamma_S z_{s+1}[y, z^S] - \sum_S \gamma_S [y, z_{s+1}, z^S] \\
&= \sum_S \gamma_S([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S])\,,
\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Aus dem Satz 16 ergibt sich nun sehr rasch der Beweis der Behauptung, daß jedes Kommutatorprodukt als lineare Verbindung der normierten Kommutatorprodukte dargestellt werden kann.

Zunächst weise ich nach, daß die $(n-1)!$ Kommutatoren der Gestalt

$$[x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_n}]$$

linear unabhängig sind, und jeder andere Kommutator der Länge n sich durch diese linear darstellen läßt. Die lineare Unabhängigkeit folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$[x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_n}] = x_1 x_{\alpha_2} x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_n} + F(x)$$

gilt mit einer Form $F(x)$, in der nur solche Potenzprodukte auftreten, bei denen die Unbestimmte x_1 nicht an erster Stelle steht, die $(n-1)!$ Potenzprodukte $x_1 x_{\alpha_2} x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_n}$ aber linear unabhängig sind.

Für $n = 2$ gilt

$$[x_2, x_1] = -[x_1, x_2].$$

Ist daher $K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n}]$ ein beliebiger Kommutator, in dem x_{β_n} von x_1 verschieden ist, so folgt durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} K_n &= [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}]\, x_{\beta_n} - x_{\beta_n}[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}] \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha ([x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}]\, x_{\beta_n} - x_{\beta_n}[x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}]) \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha [x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}, x_{\beta_n}]. \end{aligned}$$

Mithin brauchen nur noch Kommutatoren der Gestalt

$$K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1]$$

behandelt zu werden. Für diese folgt aus (14) im Falle $n > 3$:

$$\begin{aligned} &[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}]\,[x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_{n-1}}, x_1]\,[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}] \\ &= [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}], \end{aligned}$$

andererseits nach der gleichen Formel

$$[[x_{\beta_{n-1}}, x_1], [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}]] = \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S],$$

worin S alle Permutationen der Ziffern $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ durchläuft. Somit ist

$$[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}] - \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S].$$

Für die auf der rechten Seite stehenden Kommutatoren, die sämtlich die Unbestimmte x_1 nicht mehr an letzter Stelle enthalten, ist die Behauptung bereits bewiesen.

Der noch verbleibende Fall $n = 3$ erledigt sich leicht mittels der bekannten Identität

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

Nunmehr kann als bewiesen angenommen werden, daß jedes Kommutatorprodukt aus weniger als s Kommutatoren sich als lineare Verbindung normierter Kommutatorprodukte darstellen läßt. Zur Vereinfachung der Schreibweise nenne ich Λ den durch die normierten Kommutatorprodukte aufgespannten linearen Modul. Ferner werde ein beliebiges Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \dots C_s$$

gesetzt, worin C_σ einen Kommutator der Länge n_σ bezeichnet (für $\sigma = 1, 2, \dots, s$). Auf Grund der Formel (14) und der Induktionsannahme gilt dann

$$C_1 C_2 \dots C_s \equiv C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \dots C_{\sigma_s} (\Lambda)$$

für jede Permutation der Kommutatoren, da die Differenz

$$C_1 C_2 \dots C_s - C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \dots C_{\sigma_s}$$

nach (14) als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten aus weniger als s Kommutatoren dargestellt werden kann. Daher darf für das Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n})$$

angenommen werden, daß

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s$$

gilt und daß die etwa auftretenden Kommutatoren gleicher Länge bereits in der Reihenfolge stehen, die notwendig ist, damit die in ihnen vorkommenden Unbestimmten mit kleinstem Index bereits nach zunehmender Größe angeordnet sind. Nunmehr läßt sich jeder einzelne Kommutator C_σ als lineare Verbindung solcher Kommutatoren gleicher Länge in den gleichen Unbestimmten darstellen, die sämtlich die Unbestimmte mit dem kleinsten vorkommenden Index an erster Stelle enthalten. Damit wird aber

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \dots C_s$$

als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten erhalten, die die drei Bedingungen für die normierten Kommutatorprodukte erfüllen.

Mithin ist Satz 15 in allen seinen Teilen bewiesen.

(Eingegangen am 29. Juni 1949.)

Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Heinrich Tietze in München.

Es handelt sich um die bekannte Relation der Flächentheorie

$$\text{III} - 2H\,\text{II} + K\,\text{I} = 0, \tag{1}$$

worin I, II, III die drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes bedeuten, ferner K das Krümmungsmaß und H die mittlere Krümmung. Für diese Relation (1) wird in § 2 ein Beweis gegeben, der abweicht von den Beweisen in den mir zugänglichen Werken, der also — wenn nicht neu — so doch weniger bekannt scheint. Der Beweis bedient sich des auf die charakteristische Gleichung einer Matrix bezüglichen Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes, dem wir in § 1 die nachher benötigte Gestalt geben.

§ 1.

Ist $Q = (q_i^k)$ eine quadratische Matrix ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) von n^2 Elementen, $J = (\delta_i^k)$ die Einheits-Matrix, O die Nullmatrix und $\varphi(\lambda)$ die charakteristische Funktion von Q:

$$\varphi(\lambda) = |Q - \lambda J| = |q_i^k - \lambda\,\delta_i^k| = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu}\lambda^\nu,$$

dann gilt dem erwähnten Satz[1]) gemäß die Gleichung

$$O = \varphi(Q) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu} Q^\nu \tag{2}$$

(darin $Q^0 = J$). Sind nun $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ zwei quadratische Matrizen von je n^2 Elementen, dabei die Determinante $|A| \neq 0$, so daß

[1]) Vgl. dazu auch „Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen", Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss., Mathemat. naturwiss. Abt., Jahrgang 1945/46 (1947), S. 45—56. [Dem Referat über diese Note in Math. Reviews, vol. 9, p. 406 von Herrn C. C. Mac Duffee entnehme ich übrigens, daß ein noch allgemeinerer Satz von H. B. Philipps, Am. J. Math. 41 (1919) gegeben worden sei (Zusatz bei der Korrektur)].

die zu A inverse Matrix $A^{-1} = (a^{ik})$ sich gemäß

$$\sum_h a_{ih} a^{hk} = \delta_i^k \tag{3}$$

bestimmen läßt, dann werde $Q = BA^{-1}$, also

$$q_i^k = \sum_h b_{ih} a^{hk} \tag{4}$$

genommen, und es ergibt sich aus (2) die Gleichung

$$O = \varphi(BA^{-1}) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu}(BA^{-1})^\nu, \tag{5}$$

die wir in § 2 (für $n = 2$) verwenden werden. Dabei ist $\gamma_0 = (-1)^n$ und es sind $(-1)^{n-1}\gamma_1$, $(-1)^{n-2}\gamma_2$, $(-1)^{n-3}\gamma_3$, ... die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ der Gleichung $0 = \varphi(\lambda)$. Mit dieser Gleichung äquivalent ist, wegen

$$B - \lambda A = (Q - \lambda J) A$$

die Gleichung

$$0 = f(\lambda) = |B - \lambda A| = \varphi(\lambda) \cdot |A|, \tag{6}$$

so daß wir $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ auch als die Wurzeln der Gleichung (6) bezeichnen können.

§ 2.

Sei $n = 2$, seien ferner $u = u^1$, $v = u^2$ die Flächenparameter, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ der Vektor vom Anfangspunkt zu einem Flächenpunkt, ξ derjenige zur Fläche normale Einheitsvektor, für den die Determinante der drei Vektoren $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2}, \xi\right) > 0$ ausfällt, $a_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^k}$, $b_{ik} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u\, \partial u^k} \cdot \xi$ somit

$$\mathrm{I} = \sum_{ik} a_{ik}\, du^i\, du^k = ds^2 \text{ und } \mathrm{II} = \sum_{ik} b_{ik}\, du^i\, du^k$$

die erste und die zweite Fundamentalform[2]). Unter Verwendung der Weingarten'schen Ableitungsformeln

$$\frac{\partial \xi}{\partial u^i} = -\sum_{hr} a^{rh} b_{hi} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^r} \tag{7}$$

ergibt sich dann die dritte Fundamentalform

$$\mathrm{III} = \sum_{ik} c_{ik}\, du^i\, du^k.$$

[2]) In der klassischen Gauss'schen Schreibweise ist also $a_{11} = E$, $a_{12} = a_{21} = F$, $a_{22} = G$, während man für die b_{ik} häufig die Bezeichnungen $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$ antrifft.

— als erste Fundamentalform $\sum_{ik} \frac{\partial \xi}{\partial u^i} \frac{\partial \xi}{\partial u^k} du^i du^k = d\sigma^2$ des sphärischen Bildes $\xi = \xi(u^1, u^2)$ der Fläche, — gemäß

$$c_{ik} = \frac{\partial \xi}{\partial u^i} \frac{\partial \xi}{\partial u^k} = \sum_{hjrs} a^{rh} a^{sj} b_{hi} b_{jk} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}$$

$$= \sum_{hjrs} a^{rh} a^{sj} b_{hi} b_{jk} a_{rs} = \sum_{hj} b_{ih} a^{hj} b_{jk}$$

(wegen $a_{ik} = a_{ki}$ ist $a^{rh} = a^{hr}$ und gemäß (3) ist $\sum_{rs} a^{hr} a_{rs} a^{sj} = \sum_{s} \delta_s^h a^{sj} = a^{hj}$). Es ist also die Matrix

$$C = (c_{ik}) = B A^{-1} B.$$

Die Wurzeln λ', λ'' der Gleichung (6) sind nun in unserem Falle [3]) nichts anderes als die Hauptkrümmungen; es ist also

$$\gamma_1 = -(\lambda' + \lambda'') = -2H, \qquad \gamma_2 = \lambda' \lambda'' = K;$$

und aus Gleichung (5) für $n = 2$, das ist

$$B A^{-1} B A^{-1} - (\lambda' + \lambda'') B A^{-1} + \lambda' \lambda'' J = O.$$

wird, wenn wir von rechts mit A multiplizieren,

$$C - 2HB + KA = O$$

oder

$$c_{ik} - 2H b_{ik} + K a_{ik} = 0,$$

also die zu beweisende Relation (1).

---

[3]) In der Schreibweise der Anm. 2 lautet die Gleichung

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E, & M - \lambda F \\ M - \lambda F, & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0.$$

(Eingegangen am 29. Juli 1949.)

Due semplici limitazioni nel campo complesso delle funzioni associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite e del termine complementare della loro rappresentazione asintotica.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Nota di

Giovanni Sansone a Firenze.

1. Le trascendenti intere [1])

$$f_n(x) = \pi^{-1/4}[2^n n!]^{-1/2}\, e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{1}$$

associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{d x^n},\quad n = 1, 2, \ldots,\quad H_0 = 1 \tag{2}$$

formano un sistema ortogonale e normale nell'intervallo $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f_m(x)\, d x = 0,\quad n \neq m; \tag{3_1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x)\, d x = 1, \tag{3_2}$$

e soddisfano l'equazione integrale di seconda specie di Volterra [2])

$$f_n(x) = f_n(0)\cos\left[\sqrt{2n+1}\; x\right] + f_n'(0)\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{2n+1}\; x\right]}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)\operatorname{sen}\left[\sqrt{2n+1}\;(\alpha - x)\right] d\alpha, \tag{4}$$

dove

$$f_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{1/2},\quad f_{2n}'(0) = 0, \tag{5_1}$$

$$f_{2n+1}(0) = 0,\quad f_{2n+1}'(0) = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{4n+2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{1/2}. \tag{5_2}$$

---

[1]) Cfr. a) E. Kamke: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. (2. Auflage, 1943), p. 401; b) G. Szegö: Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, 23 (New York. 1939), p. 102; c) G. Sansone: Sviluppi in serie di funzioni ortogonali (2ª ediz., Bologna, 1946), p. 293.

[2]) Cfr. U. Kowallik: Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen, Math. Zeitschr., 31 (1930), (pp. 498—518), p. 502.

Dalla (4) supposto ad es. n pari, si ha per $f_{2n}(x)$ l'equazione

$$(6) \quad f_{2n}(x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x] - N^{-1/2}\int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha, \qquad N = 4n+1,$$

e tenuto conto che $|f_{2n}(0)| < 2^{3/4}\pi^{-1/2}N^{-1/4}$ e che per la disuguaglianza di Bunikowski-Schwarz e la (3_2) si ha

$$\left|\int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha\right| < \left[\int_0^{|x|}\alpha^4\,d\alpha\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{2n}^2(\alpha)\,d\alpha\right]^{1/2} < |x|^{5/2}$$

ne risulta qualunque sia x reale

$$(7) \quad |f_{2n}(x)| \leqq \frac{1}{N^{1/4}}\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{|x|^{5/2}}{N^{1/4}}\right].$$

Dalla (6) si ha

$$f'_{2n}(x) = -N^{1/2}f_{2n}(0)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}x] + \int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\cos[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha,$$

e perciò anche, qualunque sia x reale

$$(8) \quad |f'_{2n}(x)| \leqq N^{1/4}\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{|x|^{5/2}}{N^{1/4}}\right].$$

Troveremo nel n. 2 una limitazione di $f_{2n}(x)$ nel campo complesso, che riesce assai utile quando si voglia applicare il metodo di J. V. Uspensky per la determinazione asintotica dei polinomi di Tchebychef-Laguerre [3]).

2. Sia $x = u + iv$, (u e v reali), e per fissare le ipotesi $v > 0$. Si ha

$$f_{2n}(u+iv) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}(u+iv)] - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^u \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - u - iv)]\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^v (u+it)^2 f_{2n}(u+it)\,\mathrm{senh}\,[N^{1/2}(t-v)]\,dt.$$

dove il primo integrale è esteso al segmento $(0, u)$ dell'asse reale e il secondo al segmento $(0, v)$ dello stesso asse.

Posto

$$(9) \quad f_{2n}(u+iv) = \varphi(v),$$

$$(10) \quad f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}(u+iv)] - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^u \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - u - iv)]\,d\alpha = \omega(v)$$

[3]) J. V. Uspensky: On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's Polynomials, Ann. of Math., (2), 28 (1927), pp. 593—619.

si ha

$$\varphi(v) = \omega(v) - \frac{1}{N^{1/2}} \int_0^v (u + it)^2 \operatorname{senh}\left[N^{1/2}(v - t)\right] \varphi(t)\, dt \tag{11}$$

la quale è per $\varphi(v)$ un'equazione integrale di seconda specie di VOLTERRA col nucleo

$$K(v, t) = -\frac{1}{N^{1/2}} (u + it)^2 \operatorname{senh}\left[N^{1/2}(v - t)\right].$$

Risulta

$$|K(v, t)| \leqq \frac{1}{N^{1/2}} (u^2 + t^2)\, e^{N^{1/2}(v-t)},\quad 0 \leqq t \leqq v,$$

per il secondo nucleo iterato $K^{(2)}(v, t)$ si ha

$$|K^{(2)}(v, t)| \leqq \frac{1}{N} \int_t^v (u^2 + \xi^2)\, e^{N^{1/2}(v-\xi)} (u^2 + t^2)\, e^{N^{1/2}(\xi - t)}\, d\xi$$

$$\leqq \frac{1}{N} (u^2 + t^2)(u^2 + v^2)\, e^{N^{1/2}(v-t)}\, \frac{v - t}{1!},$$

e per induzione per il nucleo iterato $K^{(l)}(v, t)$ di rango l si ha

$$|K^{(l)}(v, t)| \leqq \frac{1}{N^{l/2}} (u^2 + t^2)(u^2 + v^2)^{l-1}\, e^{N^{1/2}(v-t)}\, \frac{(v - t)^{l-1}}{(l-1)!},$$

e si ottiene quindi per il nucleo risolvente $\Gamma(v, t)$ della (11) la limitazione

$$\Gamma(v, t) \leqq \frac{1}{N^{l/2}} (u^2 + t^2)\, e^{N^{1/2}(v-t) + N^{-1/2}(u^2+v^2)(v-t)}.$$

Risulta

$$f_{2n}(u + iv) = \omega(v) + \int_0^v \Gamma(v, t)\, \omega(t)\, dt,$$

e poiché dalle (10), (7), (8) si ha

$$\omega(v) = \cosh\left[N^{1/2} v\right] f_{2n}(u) + i\, \frac{\operatorname{senh}\left[N^{1/2} v\right]}{N^{1/2}} f'_{2n}(u)$$

$$|\omega(v)| \leqq \frac{e^{N^{1/2} v}}{N^{1/4}} A(u^{1/2}), \tag{12_1}$$

$$\boxed{A(u^{1/2}) = 2\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{u^{5/2}}{N^{1/4}}\right]} \tag{12_2}$$

otteniamo

$$|f_{2n}(u + iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2} v}}{N^{1/4}} A(u^{1/2}) \left[1 + \int_0^v \frac{u^2 + v^2}{N^{1/2}} e^{N^{-1/2}(u^2 + v^2)(v-t)}\, dt\right]$$

e infine per v reale qualunque

$$|f_{2n}(u + iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2}|v|}}{N^{1/4}} A(u^{1/2})\, e^{N^{-1/2}(u^2+v^2)|v|}.$$

Ragionando analogamente per il caso di n dispari otteniamo la cercata limitazione

$$(13)\qquad \boxed{|f_n(u+iv)| \leq \frac{e^{N^{1/2}|v|}}{N^{1/4}} A(u^{1/2})\, e^{N^{-1/2}(u^2+v^2)|v|}, \qquad N = 2n+1}$$

dove $A(u^{1/2})$ è dato dalla (12_2)[4]).

3. a) Per l'applicazione del ricordato metodo di J. V. Uspensky nella valutazione asintotica dei polinomi di Tchebychef-Laguerre occorre limitare nel campo complesso il termine complementare della formula di approssimazione asintotica di $f_n(x)$.

Il nucleo $K(x, \alpha)$ della (6) ha l'espressione $-N^{-1/2}\alpha^2 \operatorname{sen}[N^{1/2}(\alpha - x)]$, e con procedimento di induzione si prova che il suo nucleo iterato di rango $l+1$, $K^{(l+1)}(x, \alpha)$ ha l'espressione

$$(14)\qquad K^{(l+1)}(x,\alpha) = \frac{\alpha^2}{N^{(l+1)/2}}\Big[(x-\alpha)\, Q^{(1)}_{3l-1}(x,\alpha)\cos[N^{1/2}(x-\alpha)] + Q^{(2)}_{3l}(x,\alpha)\operatorname{sen}[N^{1/2}(x-\alpha)]\Big]$$

dove $Q^{(1)}_{3l-1}(x, \alpha)$, $Q^{(2)}_{3l}(x, \alpha)$ indicano dei polinomi razionali interi nelle variabili (x, α) di grado rispettivo $3l-1$, $3l$, con coefficienti uniformemente limitati rispetto ad N.

Dalla (6) si ottiene

$$\frac{f_{2n}(x)}{f_{2n}(0)} = \cos[N^{1/2}x] + \int_0^x K(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha + \sum_{j=2}^{l}\int_0^x K^{(j)}(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha + \int_0^x K^{(l+1)}(x,\alpha) f_{2n}(\alpha)\, d\alpha,$$

ed osservato che

$$\int_0^x K(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha = \frac{x^3}{6N^{1/2}}\operatorname{sen}[N^{1/2}x] + \frac{1}{4N}\left\{x^2\cos[N^{1/2}x] - \frac{x\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}{N^{1/2}}\right\}$$

[4]) H. Hille [A class of reciprocal functions. Ann. of Math. 27 (1925), (pp. 427—464), p. 431] applicando la formula della derivata n esima di Cauchy deduce dalla (2) la limitazione

$$|f_n(u+iv)| \leq \pi^{-1/4}(n!)^{1/2}[2^{1/2}R]^{-n}\, e^{-(u^2-v^2)/2 + R(u^2+v^2)^{1/2} + n/2}$$

ove

$$R = [(u^2+v^2+2n)^{1/2} - (u^2+v^2)^{1/2}]/2.$$

Per altre limitazioni del campo complesso cfr. N. Schwid: The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. Trans. of the Am. Math. Soc., 37 (1935), pp. 339—362.

otteniamo

$$(15)\qquad f_{2n}(x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x] + \frac{f'_{2n}(0)}{N^{1/2}}\,\frac{x^3}{6}\,\operatorname{sen}[N^{1/2}x] + \frac{t(2n,x)}{N}$$

$$(16)\qquad t(2n,x) = \frac{1}{N^{1/4}}\left\{P^{(1)}_{3l+3}(x)\cos[N^{1/2}x] + P^{(2)}_{3l+3}(x)\operatorname{sen}[N^{1/2}x]\right\} + \frac{\bar{t}(2n,x)}{N^{(l+1)/2}}$$

con

$$\bar{t}(2n,x) = N^{(l+1)/2}\int_0^x K^{(l+1)}(x,\alpha)\,f_{2n}(\alpha)\,d\alpha,$$

e $P^{(1)}_{3l+3}(x)$, $P^{(2)}_{3l+3}(x)$ *indicano dei polinomi in* x, *di grado* $3l+3$, *con coefficienti limitati rispetto ad* n.

Per $x = u + iv$ (u e v reali) si ha

$$\bar{t}(2n,u+iv) = N^{(l+1)/2}\left\{\int_0^u K^{(l+1)}(u+iv,\alpha)\,f_{2n}(\alpha)\,d\alpha + i\int_0^v K^{(l+1)}(u+iv,u+i\alpha)\,f_{2n}(u+i\alpha)\,d\alpha\right\},$$

dove i due integrali sono estesi ai segmenti dell'asse reale di estremi 0, u, e 0, v.

Tenuto conto delle (14) e (15) risulta

$$(17)\qquad |\bar{t}(2n,u+iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2}r}}{N^{1/4}}\left|\sum_{r=0}^{6l+11} c_r(u^2+v^2)^{r/4}\right| e^{N^{-1/2}(u^2+v^2)^{1/2}|v|}$$

con le c_r *costanti non negative, dipendenti unicamente da* l *e indipendenti da* n, e le (16) e (17) servono per limitare il termine complementare della (15).

Sostituendo la (15) nella (6) si ha per $t(2n,x)$ l'equazione

$$t(2n,x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x]\left\{-\frac{x^6}{72} + \frac{5x^4}{48N} - \frac{15x^2}{48N^2} + \frac{x^2}{4}\right\} + f_{2n}(0)\,\frac{\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}{N^{1/2}}\left\{\frac{x^5}{24} - \frac{5x^3}{24N} + \frac{15x}{48N^2} - \frac{x}{4}\right\} - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^x \alpha^2\,t(2n,\alpha)\operatorname{sen}[N^{1/2}(\alpha-x)]\,d\alpha,$$

e sostituendo in quest'ultima nel primo membro a $t(2n,x)$ l'espressi-

one ricavata dalla (16) si ottiene

$$(18) \qquad \boxed{\bar{t}(2n, x) = \bar{t}_1(2n, x)\cos[N^{1/2}x] + \bar{t}_2(2n, x)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}x]}$$

dove $\bar{t}_1(2n, x)$, $\bar{t}_2(2n, x)$ *sono due trascendenti intere in* x, *che soddisfano entrambe la limitazione* (17).

b) Cangiando $2n$ in $2n+1$, e posto $N = 4n+3$ si avrà

$$(15') \quad f_{2n+1}(x) = f'_{2n+1}(0)\frac{\mathrm{sen}\,[N^{1/2}x]}{N^{1/2}} - \frac{f'''_{2n+1}(0)}{N}\frac{x^3}{6}\cos[N^{1/2}x] + \frac{t(2n+1, x)}{N},$$

e $t(2n+1, x)$ gode le stesse propietà di $t(2n, x)$.

(Eingegangen am 7. September 1949.)

Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsinki.

1. Bei der Untersuchung der offenen Riemann'schen Flächen hat man besondere Aufmerksamkeit denjenigen Flächen gewidmet, auf welchen nichtkonstante eindeutige analytische oder harmonische Funktionen existieren, die entweder beschränkt sind oder ein endliches Dirichletintegral besitzen. Für Potentialfunktionen gilt der Satz, daß das Verschwinden des harmonischen Maßes (der Kapazität) des idealen Randes der Fläche die Existenz von nichtkonstanten eindeutigen regulären Potentialfunktionen mit beschränktem Betrag oder Dirichletintegral ausschließt. Diese Bedingung löst für den Fall einer schlichtartigen Fläche vollständig die Aufgabe: Ist nämlich das harmonische Maß des Randes positiv, so gibt es auf der Fläche sicher nichtkonstante Potentialfunktionen, welche den angegebenen Beschränktheitsbedingungen genügen. Dagegen ist die Frage nach der Existenz solcher Potentialfunktionen auf beliebigen Flächen (vom Geschlecht ∞), deren Ränder positives harmonisches Maß haben, noch nicht entschieden[1]).

2. Studiert man näher die Methode, welche zur Lösung des Problems geführt hat für eine schlichtartige Fläche ($p = 0$), so sieht man, daß das Wesentliche dabei die Eigenschaft einer solchen „positivberandeten" Fläche ist, daß der Rand Γ der Fläche sich durch einen (kompakten) Rückkehrschnitt Γ_0 auf der Fläche in zwei isolierte Komponenten Γ_1, Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$) zerlegen läßt, welche b e i d e positives harmonisches Maß haben. Diese Beweismethode läßt sich auch ohne wesentliche Modifikationen auf Flächen von endlichem Geschlecht p anwenden; denn der Rand Γ einer solchen Fläche gestattet stets eine solche Zerlegung. Und dasselbe gilt auch für Flächen mit $p = \infty$, falls der Rand Γ einer derartigen Darstellung $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ fähig ist. Der kom-

[1]) Die Bemerkung (S. 31, N. 25) meiner Arbeit „Quadratisch integrierbare Differentiale etc.", Ann. Ac. Sci. Fenn., Math.-Phys. I, N: 01, 1941, ist dahin zu berichtigen, daß die Existenz von nichtkonstanten beschränkten Potentialfunktionen auf offenen Flächen mit positivem Rand nur dann gesichert ist, wenn die Menge der idealen Randpunkte *harmonisch meßbar* ist. Ob der Fall der Nichtmeßbarkeit eintreffen kann, ist unentschieden.

plizierte und schwerzugängliche Fall ist derjenige, wo der Flächenrand Γ nicht in zwei solche isolierte Teile eingeteilt werden kann. Die folgenden Seiten geben einen kleinen Beitrag zur Lösung des gestellten Problems gerade für diesen Fall.

3. Sei also F eine offene RIEMANN'sche Fläche mit $p \leqq \infty$ und α eine Punktmenge auf F, mit folgenden Eigenschaften:

1^0. α besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen analytischen (geschlossenen oder nichtgeschlossenen) kompakten Bogen auf F. Falls diese Teilbogen in unendlicher Anzahl vorhanden sind, so sollen sie sich nur gegen den idealen Rand Γ der Fläche F häufen.

2^0. Die Bogenmenge α zerlegt die Fläche in zwei getrennte zusammenhängende Teile F' und F'' $(F = F' + F'')$.

Eine solche zerlegende Menge α läßt sich immer konstruieren, z. B. so, daß man F zunächst durch eine (abzählbare) Rückkehrschnittmenge α' einfach zusammenhängend macht und dann die aufgeschnittene Fläche durch einen Querschnitt α'' zerlegt; es ist dann $\alpha = \alpha' + \alpha''$. Im folgenden wird jedoch nicht vorausgesetzt, daß α durch diese besondere Konstruktion gewonnen worden ist: das Wesentliche für uns sind lediglich die Bedingungen 1^0 und 2^0 der Querschnittsmenge α.

4. Wenn nun α eine beliebige zerlegende Querschnittsmenge von F ist mit den Eigenschaften 1^0 und 2^0, so wird F' einen Rand Γ' haben, der teilweise aus den inneren Punkten α der Fläche, teilweise aus einem „idealen" Teil Γ' der Berandung Γ besteht, und entsprechendes gilt für F'' und seinen Rand $\Gamma'' = \alpha + \Gamma''$ $(\Gamma = \Gamma' + \Gamma'')$.

Wir führen nun die harmonischen Maße der Randteile Γ' und Γ'' inbezug auf bzw. F' und F'' ein. Diese Maße werden folgendermaßen definiert:

Man schöpfe F mit Hilfe einer Folge von ineinander geschachtelten kompakten Teilgebieten F_n mit den (kompakten) stückweise analytischen Rändern Γ_n aus $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Das harmonische Maß ω von Γ' wird dann bekanntlich als Grenzwert der harmonischen Maße ω_n der Kurven Γ_n, inbezug auf das Gebiet $F_n - F_0$, durch den Grenzübergang $n \to \infty$ gewonnen, wobei das Maß ω_n als diejenige in $F_n - F_0$ eindeutige Potentialfunktion definiert ist, welche auf Γ_n gleich 1 ist und auf Γ_0 verschwindet.

Entsprechend bilde man nun das harmonische Maß ω_n' desjenigen Teils Γ_n' von Γ_n, welcher in F' fällt, inbezug auf das Durchschnittsgebiet $F_n' = F' \cdot F_n$: es ist also ω_n' diejenige in F_n' reguläre, eindeutige und beschränkte Potentialfunktion, welche auf Γ_n' gleich 1 ist und auf α verschwindet; ähnlich wird ω_n'' als das harmonische Maß des komplementären Teils Γ_n'' $(\Gamma_n = \Gamma_n' + \Gamma_n'')$, inbezug auf das Gebiet $F_n'' = F'' \cdot F_n$, erklärt.

Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt sofort, daß die Folge ω_n' für einen festen Punkt P der Fläche F' mit wachsendem n monoton ab-

nimmt. Nach dem HARNACK'schen Prinzip existiert also die Grenzfunktion

$$\omega' = \lim \omega_n';$$

sie ist in F' harmonisch und variiert im Intervall $(0, 1)$. Es wird nun ω' als das harmonische Maß des Randteils Γ' inbezug auf das Gebiet F' definiert; entsprechend wird das harmonische Maß von Γ'' inbezug auf das Gebiet F'':

$$\omega'' = \lim \omega_n''.$$

5. Zwei Fälle sind möglich: Entweder ist das eingeführte Maß ω' (bzw. ω'') innerhalb F' (bzw. F'') positiv; dann ist es eine nichtkonstante Funktion und nimmt auf α den Randwert Null an. Oder verschwindet diese Funktion identisch: man sagt dann, der Randteil Γ' (bzw. Γ'') habe das harmonische Maß Null in Bezug auf F' (bzw. F'').

Falls das harmonische Maß ω von Γ verschwindet, so gilt dasselbe auch für die Maße ω' und ω'' von Γ' und Γ''. Durch geeignete Wahl von F_n kann man nämlich erreichen, daß ω eine Majorante für ω' in F' und von ω'' in F'' definiert. Wenn umgekehrt $\omega > 0$, so läßt sich daraus noch nicht der Schluß ziehen, daß auch die Maße ω' und ω'' positiv seien; im Gegenteil kann man schon in einfachen Fällen von positivberandeten Flächen, z. B. wenn F das Innere eines Kreises ist, die Querschnittsmenge α so wählen, daß sowohl ω' als ω'' verschwinden.

Es würde für das hier gestellte Problem wichtig sein, zu entscheiden, für welche offenen RIEMANN'schen Flächen F mit positivem Rand eine Zerlegung $F = F' + F''$ so möglich ist, daß die Maße ω' und ω'' **beide** positiv ausfallen; denn es gilt der

Satz. *Falls die Fläche F positiven Rand hat und mit einer zerlegenden Querschnittsmenge α in zwei Teilflächen F' und F'' geteilt werden kann, deren ideale Randteile Γ' und Γ'' beide positives Maß haben, so läßt sich auf F eine nichtkonstante, eindeutige Potentialfunktion mit beschränktem Betrag konstruieren.*

6. Der Beweis ergibt sich mittels des alternierenden Verfahrens. Man konstruiere zu α eine in F' verlaufende benachbarte Kurvenmenge β, welche ebenfalls F zerlegt und so nahe an α verläuft, daß der zwischen α und β liegende Flächenteil aus lauter zwei- oder einfach zusammenhängenden Flächenstücken besteht, je nachdem der betreffende angrenzende Randteil α geschlossen oder offen (nichtkompakt) ist. Es ist dann auch β eine zerlegende Punktmenge auf F. Um eine übersichtliche Schreibweise einzuführen, soll das Gebiet F' fortan mit F_α bezeichnet werden; die Bezeichnung F_β soll dasjenige der zwei von der Querschnittsmenge β berandeten Teilgebiete von F angeben, welches nicht als Teilgebiet in F_α enthalten ist. Die Durchschnittsmenge $F_\alpha F_\beta$ ist nicht leer. Die idealen Randteile der Flächen F_α und F_β seien Γ_α $(\equiv \Gamma')$ und Γ_β $(\Gamma_\beta > \Gamma'')$.

Es ist für das Folgende wichtig, die Wahl der Punktmenge β durch eine weitere, metrische Bedingung noch einzuschränken. Sei γ_n derjenige Teil der Kurvenmenge Γ_n, welcher im Durchschnittsgebiet $F_\alpha . F_\beta$ liegt. Mit μ_n bezeichne ich das harmonische Maß von γ_n, in Bezug auf das Gebiet F_n, d. h. diejenige in F_n eindeutige Potentialfunktion, welche auf γ_n gleich 1 ist und auf dem komplementären Randteil $\Gamma_n - \gamma_n$ verschwindet. Indem man β genügend nahe an α wählt, kann man erreichen, daß $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$. Diese Bedingung, die man so kurz aussprechen kann, daß der ideale Randteil von $F_\alpha . F_\beta$ das harmonische Maß Null hat, soll im folgenden als gültig vorausgesetzt werden.

7. Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Das harmonische Maß von Γ_β ist positiv.*

Dies ist eine fast unmittelbare Folgerung daraus, daß der Randteil $\Gamma'' < \Gamma_\beta$ schon nach Voraussetzung positives Maß hat. Bildet man nämlich mit Hilfe der Kurven Γ_n die Näherungsfunktionen, als deren Grenzwerte die Maße von Γ'' und Γ_β erhalten werden, so sieht man mit dem Maximumprinzip sofort ein, daß das Maß von Γ_β das Maß von Γ'' majoriert.

8. Hilfssatz 2. *Es sei auf der Querschnittsmenge α eine, auf den einzelnen konstituierenden Bogen (α) stetige, reelle Funktion f_α gegeben, so daß*

$$0 \leqq f_\alpha \leqq 1.$$

Unter allen in F_α eindeutigen und regulären Potentialfunktionen u_α, welche den Bedingungen

$$0 \leqq u_\alpha \leqq 1, \qquad u_\alpha = f_\alpha \text{ auf } \alpha,$$

genügen, gibt es zwei wohlbestimmte, $\bar{u}_\alpha$ und $\underline{u}_\alpha$, welche durch die Extremumeigenschaft

$$u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha, \qquad u_\alpha \geqq \underline{u}_\alpha$$

ausgezeichnet sind.

Beweis. Man definiere zwei reguläre, eindeutige Potentialfunktionen $\bar{u}_\alpha^n$ und $\underline{u}_\alpha^n$ im kompakten Gebiet $F_\alpha . F_n$ durch die Randbedingungen

$$\bar{u}_\alpha^n = \underline{u}_\alpha^n = f_\alpha \text{ auf } \alpha;$$
$$\bar{u}_\alpha^n = 1, \; \underline{u}_\alpha^n = 0 \text{ auf } \Gamma_n.$$

Nach dem Dirichlet'schen Prinzip gibt es nur eine beschränkte Potentialfunktion $\bar{u}_\alpha^n$ bzw. $\underline{u}_\alpha^n$ mit diesem Randverhalten, und die Werte dieser Funktionen fallen in das Intervall (0, 1). Es folgt aus dem Maximum- und Minimumprinzip, daß die Folge $\bar{u}_\alpha^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit wachsendem n monoton abnimmt, während die Folge $\underline{u}_\alpha^n$ monoton zunimmt. Nach dem Harnack'schen Prinzip streben sie zwei wohlbestimmten regulären Grenzfunktionen $\bar{u}_\alpha$ und $\underline{u}_\alpha$ zu, und es ist leicht einzusehen, daß diese Funktionen zu der betrachteten Klasse (u_α) gehören. Sie besitzen auch die gewünschten Extremaleigenschaften.

Die Bedingung $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$ ist nämlich eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip: Es ist im Gebiet $F_n . F_\alpha$ offenbar $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha^n$, und also auch $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$. Entsprechend beweist man die Relation $u_\alpha \geqq \underline{u}_\alpha$.

9. Es ist leicht einzusehen, daß $\bar{u}_\alpha \equiv \underline{u}_\alpha$, falls das harmonische Maß von Γ_α Null ist. In dem uns interessierenden Fall, wo dieses Maß nach Voraussetzung positiv ist, ist dagegen, für innere Punkte des Gebietes F_α, $\underline{u}_\alpha < \bar{u}_\alpha$. Es gilt ferner der für das folgende wichtige

Hilfssatz 3. *Falls das harmonische Maß von Γ_α positiv ist, so wird*

$$\overline{\lim}\ \bar{u}_\alpha = 1, \qquad \underline{\lim}\ \underline{u}_\alpha = 0.$$

Zum Beweise vergleiche man die Näherungsfunktion $\bar{u}_\alpha^n$, welche in $F_n . F_\alpha$ mit Hilfe der gegebenen Randwerte f_α und 1 gebildet ist, mit der Funktion ω_α'', welche der besonderen Wahl $f_\alpha = 0$ entspricht, und findet $\omega_\alpha'' \leqq \bar{u}_\alpha^n$. Für $n \to \infty$ strebt ω_α'' gegen das harmonische Maß $\omega_\alpha \equiv \omega'$ von Γ_α, und man erhält durch diesen Grenzübergang: $\omega_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$. Für den ersten Teil des Hilfssatzes 3 genügt es also nachzuweisen, daß $\overline{\lim}\ \omega_\alpha = 1$. Dies folgt aber daraus, daß einerseits $\omega_\alpha > 0$ in F_α ist, anderseits ω_α (nach Hilfssatz 2) die obere Grenze aller Funktionen der Klasse (u_α) ist, welche den Randwerten $f_\alpha = 0$ entsprechen. Es ist somit jedenfalls $1 \geqq \overline{\lim}\ \omega_\alpha = \lambda > 0$, und sogar genau $\lambda = 1$; denn würde $0 < \lambda < 1$ sein, so würde man in $\omega_\alpha + (1-\lambda)\omega_\alpha$ eine Funktion der Klasse (u_α) haben, welche in F_α größer als ω_α wäre, im Widerspruch zu der Extremumeigenschaft von ω_α.

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil $\underline{\lim}\ u_\alpha = 0$ ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung: man hat beim Beweis nur die Hilfsfunktion ω_α'' mit $1 - \omega_\alpha''$ zu ersetzen.

10. Nach diesen Vorbereitungen setze man das alternierende Verfahren folgendermaßen an. Wir erklären in F_α und F_β zwei Folgen von eindeutigen Potentialfunktionen $u_0, u_1, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots$, indem wir

$$u_0 = \omega_\alpha$$

setzen und die Funktionen u_n allgemein als die „Oberfunktionen" $\bar{u}_\alpha$ definieren, entsprechend den Randwerten

$$f_\alpha = v_{n-1} \text{ auf } \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

während v_n gleich der „Unterfunktion" $\underline{v}_\beta$ in F_β genommen wird, mit den Randwerten

$$f_\beta = u_n \text{ auf } \beta \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

diese Funktionen bestimmen sich in der Reihenfolge $u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots$

Mit Hilfe des Maximumprinzips ergibt sich, daß die Funktionen u_n, v_n nur Werte aus dem Intervall $(0, 1)$ annehmen, und daß sie monoton zunehmen:

$$u_0 \leqq u_1 \leqq \ldots, \qquad v_0 \leqq v_1 \leqq \ldots.$$

Aus dem HARNACKschen Prinzip folgt, daß die Grenzfunktionen $u = \lim u_n$, $v = \lim v_n$ in F_α bzw. F_β reguläre Potentialfunktionen darstellen. Die Anwendung des Maximumprinzips auf die Differenz $u_n - v_n$ im Gebiet $F_\alpha . F_\beta . F_n$ ergibt ferner, mit Rücksicht auf die definierenden Randbedingungen der Funktionen u_n und v_n und auf das Verschwinden des harmonischen Maßes μ_n von γ_n für $n \to \infty$, daß $u_n - v_n \to 0$ im Gebiet $F_\alpha F_\beta$ gilt. Es ist also hier $u = v$ und diese Funktionen bilden eine auf der ganzen Fläche F eindeutige, reguläre Potentialfunktion U, deren Werte im Intervall (0, 1) eingeschlossen sind.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß U nicht konstant ist. In der Tat läßt es sich zeigen, daß sogar

$$\underline{\lim}\, U = 0, \qquad \overline{\lim}\, U = 1.$$

Um dies einzusehen, gehen wir zum Beweis von Hilfssatz 3 zurück. Es wurde dort gezeigt, daß das harmonische Maß ω_α die Eigenschaft $\overline{\lim}\, \omega_\alpha = 1$ besitzt, und ferner, daß

$$\omega_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha,$$

wo $\bar{u}_\alpha$ die mit einer beliebigen Randwertfolge $f_\alpha (0 \leqq f_\alpha \leqq 1)$ gebildete Oberfunktion ist. Da nun U als Grenzwert einer Folge u_n von solchen Oberfunktionen ist, so gilt also auch $\omega_\alpha \leqq U$, und die Beziehung $\overline{\lim}\, U = 1$ ist hiermit nachgewiesen.

Die Bedingung $\underline{\lim}\, U = 0$ folgt durch eine analoge Überlegung, angewandt auf das harmonische Maß ω_β des idealen Randteils von F_β. Man hat (vgl. Nr. 9) für eine beliebige Unterfunktion $\underline{u}$, entsprechend einer Randbelegung $f_\beta (0 \leqq f_\beta \leqq 1)$ auf β, die Relation

$$\underline{u}_\beta \leqq 1 - \omega_\beta,$$

und somit, da U der Grenzwert einer Folge v_n von Unterfunktionen im Gebiet F_β ist, auch

$$U \leqq 1 - \omega_\beta.$$

Daraus folgt aber

$$\underline{\lim}\, U \leqq 1 - \overline{\lim}\, \omega_\beta = 0,$$

und, da $U \geqq 0$, $\underline{\lim}\, U = 0$, w. z. b. w.

Unser Satz ist hiermit vollständig bewiesen. Wie es sich mit der Endlichkeit des DIRICHLETintegrals der konstruierten beschränkten Potentialfunktion verhält, ist eine kompliziertere Frage. Jedenfalls gibt es Fälle, wo dieses Integral für eine durch das obige Verfahren hergestellte Funktion unendlich ausfällt.

(Eingegangen am 3. Oktober 1949.)

Bestimmung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch sieben Paare entsprechender Punkte.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Josef Lense in München.

§ 1.

Durch sieben Paare entsprechender Punkte in „allgemeiner" Lage ist eine ebene birationale quadratische Verwandtschaft eindeutig bestimmt. Für diesen Satz findet sich ein Beweis in dem Buch von K. Doehlemann, Geometrische Transformationen, II. Teil, Sammlung Schubert Bd. 28, Leipzig 1908, S. 28. Er zerfällt in zwei Teile. Zuerst wird gezeigt, daß es eine ebene birationale quadratische Verwandtschaft gibt, für die sieben Punktepaare in „allgemeiner" Lage Paare von entsprechenden Punkten sind; dann versucht Verf. nachzuweisen, daß es nur eine derartige Verwandtschaft gibt. Doch dieser Teil des Beweises ist unverständlich. Wir wollen daher im folgenden näher darauf eingehen.

Als Beweismittel wird die Erzeugung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch zwei ebene korrelative Verwandtschaften benutzt. Es sei an die im folgenden verwendeten Tatsachen kurz erinnert. Durch eine gleich null gesetzte Bilinearform in den projektiven Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3' aus dem Bereich der komplexen Zahlen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu' = 0 \tag{1}$$

wird eine ebene korrelative Verwandtschaft festgelegt, d. h. dem Punkt (x_1, x_2, x_3), kurz Punkt x genannt, entspricht die Gerade (1), wenn wir x_1', x_2', x_3' als laufende Koordinaten auffassen, und ähnlich dem Punkt x' die Gerade (1), wenn wir die x_ν als laufende Koordinaten betrachten. Ist durch

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu' = 0 \tag{2}$$

noch eine zweite korrelative Verwandtschaft gegeben, die von der ersten verschieden ist, wobei also die $b_{\mu\nu}$ nicht den $a_{\mu\nu}$ proportional sind, so entsprechen dem Punkt x in der ersten Verwandtschaft alle

Punkte x' der Geraden (1), in der zweiten alle Punkte x' der Geraden (2), in beiden gleichzeitig somit der Schnittpunkt der beiden Geraden. Führen wir die Bezeichnungen

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\mu, \quad B_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{3}$$

ein, so sind seine Koordinaten den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

proportional. Ähnlich entspricht dem Punkte x' gleichzeitig in beiden korrelativen Verwandtschaften der Punkt. dessen Koordinaten den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2' & A_3' \\ B' & B_2' & B_3' \end{vmatrix} \tag{5}$$

proportional sind, wobei

$$A_\mu' = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\nu', \quad B_\mu' = \sum_{\nu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\nu' \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{6}$$

ist. x und x' sind also entsprechende Punkte einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft.

Bildet man das Korrelationsbüschel

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}) x_\mu x_\nu' = 0, \tag{7}$$

so entsprechen einander die eben bestimmten Punkte x und x' in allen Korrelationen des Büschels. Denn die dem Punkt x in den einzelnen korrelativen Verwandtschaften entsprechenden Geraden bilden ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel x' und ebenso die dem Punkt x' entsprechenden Geraden ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel x. Bestimmt man das Verhältnis $\alpha : \beta$ aus der kubischen Gleichung

$$\text{Det.}\,[\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}] = 0 \tag{8}$$

und hiernach mit diesem Wert von $\alpha : \beta$ den Punkt x aus den Gleichungen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}) x_\mu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{9}$$

so fallen die diesem Punkt x entsprechenden Geraden (1) und (2) und damit alle Gerade des Strahlenbüschels zusammen, dem Punkt x entspricht in der quadratischen Verwandtschaft eine ganze Gerade, er ist Haupt- oder Fundamentalpunkt. Man erhält damit die drei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft in der x-Ebene. Ähnlich ergeben sich die drei Hauptpunkte in der x'-Ebene.

Die mit einem dieser drei Werte von $\alpha : \beta$ gebildete Korrelation hat wegen (8) eine verschwindende Determinante, sie ist ausgeartet;

dem zugehörigen Hauptpunkt entspricht wegen (9) keine bestimmte Gerade, er entspricht allen Geraden der x'-Ebene.

Die Hauptpunkte der x-Ebene erhält man auch aus (4), wenn man die Koordinaten des dem Punkte x entsprechenden Punktes gleich null setzt, d. h. als die drei gemeinsamen Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$A_2B_3 - A_3B_2 = 0, \quad A_3B_1 - A_1B_3 = 0, \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \tag{10}$$

die man auch in der Form

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} \tag{11}$$

schreiben kann. Aus (11) liest man ab, daß jeder Schnittpunkt von zweien dieser Kegelschnitte auch auf dem dritten liegt, wenn nicht

$$A_1 = B_1 = 0 \quad \text{oder} \quad A_2 = B_2 = 0 \quad \text{oder} \quad A_3 = B_3 = 0 \tag{12}$$

ist. Die durch (12) festgelegten Schnittpunkte von je zweien der Kegelschnitte (10) liegen nicht auch auf dem dritten. Ähnliches gilt für die x'-Ebene. Auf Realitätsuntersuchungen und besondere Fälle (Zusammenfallen von Hauptpunkten) soll nicht eingegangen werden.

§ 2.

Wir wollen nun die Fragestellung umkehren: Kann man jede ebene birationale quadratische Verwandtschaft in dieser Weise erzeugen? Eine quadratische Verwandtschaft sei durch die Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 \tag{13}$$

gegeben, wobei die φ_ν solche homogene quadratische Polynome in den x_ν sind, daß die Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ $(\nu = 1,2,3)$ genau drei Schnittpunkte A, B, C gemeinsam haben, die auch ganz oder teilweise zusammenfallen können, und jeweils paarweise noch genau einen vierten Schnittpunkt haben, der nicht auf dem dritten Kegelschnitt liegt (siehe Fig. 1.). Diese Schnittpunkte seien A', B', C', nämlich A' der vierte Schnittpunkt von $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$, B' der von $\varphi_3 = 0$ und $\varphi_1 = 0$, C' der von $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$. Gemäß (10) haben wir sechs Gerade $A_\nu = 0$, $B_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3)$ zu bestimmen, so daß die Punkte A', B', C' mit den Punkten (12) identisch werden und die Schnittpunkte $A_2 = A_3 = 0$, $A_3 = A_1 = 0$, $A_1 = A_2 = 0$, bzw. $B_2 = B_3 = 0$, $B_3 = B_1 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$, der Reihe nach auf den Kegelschnitten $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ liegen. Die Kegelschnitte seien kurz als erster, zweiter, dritter Kegelschnitt bezeichnet.

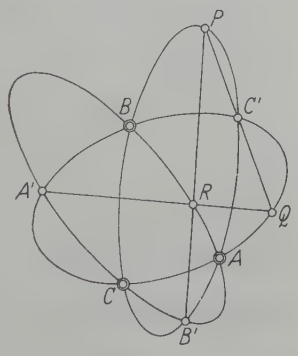

Fig. 1.

Zu diesem Zweck gehen wir von einem Punkt P des ersten Kegelschnittes aus und verbinden ihn mit dem Punkt C'. Die Gerade PC' trifft den zweiten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt Q. Diesen verbinden wir mit A'. Die Gerade QA' trifft den dritten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt R. Diesen verbinden wir mit B'. Die Gerade RB' trifft den ersten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt P'. Wenn wir den Punkt P auf dem ersten Kegelschnitt wandern lassen, wandert auch der Punkt P'. Gemäß dieser Konstruktion bilden die Punkte P und P' zwei projektive Punktreihen auf dem ersten Kegelschnitt. Diese Projektivität hat, wie sich aus der eben vorgenommenen Konstruktion ergibt, die Punkte A, B, C zu Doppelpunkten, also mindestens drei Doppelpunkte, wenn die Punkte A, B, C voneinander verschieden sind. Demnach ist jeder Punkt P Doppelpunkt und fällt daher mit dem Punkt P' zusammen. Durch Grenzübergang ergibt sich die Richtigkeit der letzten Behauptung auch dann, wenn zwei oder alle drei der gemeinsamen Schnittpunkte zusammenfallen.

Gehen wir also von zwei verschiedenen Lagen des Punktes P aus, so erhalten wir jedesmal drei Gerade, die genau die geforderten Eigenschaften der Geraden $A_\nu = 0$ bzw. $B_\nu = 0$ haben. Die linken Seiten ihrer Gleichungen seien $\bar{A}_\nu, \bar{B}_\nu$.

Weil der erste Kegelschnitt durch die Schnittpunkte $\bar{A}_2 = \bar{A}_3 = 0$, $\bar{B}_2 = \bar{B}_3 = 0$, $\bar{A}_3 = \bar{B}_2 = 0$, $\bar{A}_3 = \bar{B}_3 = 0$ geht, hat man

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \lambda_1 \bar{A}_2 \bar{B}_3 - \varrho_1 \bar{A}_3 \bar{B}_2 & \text{und ähnlich} \\ \varphi_2 = \lambda_2 \bar{A}_3 \bar{B}_1 - \varrho_2 \bar{A}_1 \bar{B}_3 \\ \varphi_3 = \lambda_3 \bar{A}_1 \bar{B}_2 - \varrho_3 \bar{A}_2 \bar{B}_1. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (14) ergibt sich für die drei gemeinsamen Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$\frac{\bar{A}_3}{\bar{B}_3} = \frac{\lambda_1 \bar{A}_2}{\varrho_1 \bar{B}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{A}_3}{\bar{B}_3} = \frac{\varrho_2 \bar{A}_1}{\lambda_2 \bar{B}_1},$$

somit

$$\frac{\lambda_1 \bar{A}_2}{\varrho_1 \bar{B}_2} = \frac{\varrho_2 \bar{A}_1}{\lambda_2 \bar{B}_1},$$

also durch Vergleich mit der aus der dritten der Gleichungen (14) abgeleiteten Gleichung $\frac{\bar{A}_2}{\bar{B}_2} = \frac{\lambda_3 \bar{A}_1}{\varrho_3 \bar{B}_1}$

$$(15)\qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3.$$

Nun sollen aber die φ_ν den linken Seiten von (10) gleich sein, wobei

$$(16)\qquad A_\nu = \sigma_\nu \bar{A}_\nu, \quad B_\nu = \tau_\nu \bar{B}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3$$

ist. Durch Vergleich mit (14) erhält man zur Bestimmung der σ_ν und τ

die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sigma_2\tau_3 = \lambda_1, \quad \sigma_3\tau_2 = \varrho_1, \\ &\sigma_3\tau_1 = \lambda_2, \quad \sigma_1\tau_3 = \varrho_2, \\ &\sigma_1\tau_2 = \lambda_3, \quad \sigma_2\tau_1 = \varrho_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Somit folgt aus den Gleichungen (17)

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = k\varrho_2\varrho_3, \quad \sigma_2 = k\lambda_1\varrho_3, \quad \sigma_3 = k\lambda_1\lambda_2, \\ &\tau_1 = k'\lambda_2\lambda_3, \quad \tau_2 = k'\varrho_1\lambda_3, \quad \tau_3 = k'\varrho_1\varrho_2, \end{aligned} \tag{18}$$

daher für k und k'

$$k k' \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \quad \text{und} \quad k k' \varrho_1\varrho_2\varrho_3 = 1. \tag{19}$$

Diese beiden Gleichungen sagen wegen (15) dasselbe aus. Man erhält daher

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = k\varrho_2\varrho_3, \quad \sigma_2 = k\lambda_1\varrho_3, \quad \sigma_3 = k\lambda_1\lambda_2, \\ &\tau_1 = \frac{1}{k\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{\lambda_3}{k\varrho_2\varrho_3}, \quad \tau_3 = \frac{1}{k\varrho_3}, \end{aligned} \tag{20}$$

also z. B. für $k = \dfrac{1}{\varrho_1\varrho_3}$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\lambda_1}{\varrho_1}, \quad \sigma_3 = \frac{\varrho_2}{\lambda_3}, \\ &\tau_1 = \frac{\varrho_1\varrho_3}{\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{\lambda_3\varrho_1}{\varrho_2}, \quad \tau_3 = \varrho_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Damit sind die A_ν und B_ν und sonach die beiden Korrelationen (1) und (2) bestimmt, durch welche die gegebene quadratische Verwandtschaft erzeugt wird. Sollten irgend zwei der Kegelschnitte unendlich viele gemeinsame Punkte haben, so wählen wir statt der drei Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ drei andere linear unabhängige des durch die Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ gebildeten Netzes mit den oben verlangten Eigenschaften. Damit erhalten wir eine zweite quadratische Verwandtschaft, die aus der ersten dadurch hervorgeht, daß auf die Punkte der x'-Ebene eine Kollineation ausgeübt wird. Die zweite dieser Verwandtschaften können wir nach dem geschilderten Verfahren durch zwei Korrelationen erzeugen. Üben wir dann auf die Punkte der x'-Ebene die inverse Kollineation aus, so erhalten wir die Darstellung der ersten Verwandtschaft durch Korrelationen.

Rechnerisch gestaltet sich diese Überlegung in folgender Weise: Wir üben auf die x'_ν die Kollineation

$$x''_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu} x'_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3) \text{ mit Det. } |c_{\mu\nu}| \neq 0 \tag{22}$$

aus, so daß die Kegelschnitte $\psi_\mu = 0$ mit $\psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu}\varphi_\nu$ die gewünschten Eigenschaften haben. Hat man dann für die quadratische Verwandt-

schaft $x_1'' : x_2'' : x_3'' = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3$ die beiden erzeugenden Korrelationen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} a'_{\mu\nu} x_\mu x''_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\mu,\nu=1}^{3} b'_{\mu\nu} x_\mu x''_\nu = 0 \tag{23}$$

gefunden, so ergeben sich die Korrelationen für die ursprüngliche Verwandtschaft durch Einsetzen von (22) in (23), d. h. ihre Koeffizienten werden

$$a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3} a'_{\mu\lambda} c_{\lambda\nu}, \quad b_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3} b'_{\mu\lambda} c_{\lambda\nu}. \tag{24}$$

§ 3.

Nun verläuft der Beweis für den am Anfang dieser Note angegebenen Satz in folgender Weise: Da sich nach § 2 jede quadratische Verwandtschaft in der angegebenen Weise durch Korrelationen erzeugen läßt, haben wir alle Korrelationen zu suchen, für welche die sieben Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind, d. h. die Koordinaten der Punkte in die Gleichungen (1) einzusetzen, wodurch wir sieben homogene lineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ erhalten. Ist der Rang dieses Gleichungssystems sieben (das ist hier die genaue Fassung des Ausdruckes: Punkte in „allgemeiner" Lage), so ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen, d. h. wir erhalten ein Büschel solcher Korrelationen, das nach § 1 genau eine quadratische Verwandtschaft erzeugt.

Doehlemann versucht die Eindeutigkeit durch folgenden Gedankengang nachzuweisen: Gäbe es neben der gefundenen Verwandtschaft noch eine zweite, so würde einem Punkt x in der ersten ein Punkt x', in der zweiten ein anderer Punkt x'' entsprechen. Die beiden Korrelationen, welche die Verwandtschaften erzeugen, hätten demnach neun Punktepaare gemeinsam, nämlich die sieben gegebenen und die beiden Paare (x, x') und (x, x''), müßten also zusammenfallen, was nicht möglich ist. Dieser Gedankengang setzt erstens voraus, daß sich jede quadratische Verwandtschaft durch Korrelationen erzeugen läßt, was nicht bewiesen wird. Zweitens haben die beiden Korrelationen nicht nur neun, sondern unendlich viele Punktepaare gemeinsam, nämlich alle Paare entsprechender Punkte der von ihnen erzeugten quadratischen Verwandtschaft, aber nur sieben derartige Paare sind willkürlich. Wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, folgt die Eindeutigkeit unmittelbar aus der Erzeugung durch Korrelationen, sobald überhaupt nachgewiesen ist, daß sich jede quadratische Verwandtschaft so erzeugen läßt, was im § 2 geschehen ist.

(Eingegangen am 7. Oktober 1949.)

Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Robert Sauer in München.

1. Einleitung.

Vielen differentialgeometrischen Begriffen und Sätzen der Flächentheorie lassen sich mit Hilfe geeignet gewählter elementargeometrischer Modelle analoge „differenzengeometrische" Begriffe und Sätze gegenüberstellen, welche die differentialgeometrischen Beziehungen anschaulich evident machen. Als Beispiel sei die im Grundgedanken auf S. Finsterwalder zurückgehende Darstellung des Gauss'schen Krümmungsmaßes[1]) und des Integralsatzes von Gauss und Bonnet[2]) durch nichtebene Dreiecksnetze erwähnt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine solche Gegenüberstellung der differentialgeometrischen Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen und der elementargeometrischen Eigenschaften der ebeneckigen Parallelogrammgitter behandelt. Diese Parallelogrammgitter, im Folgenden kurz *P-Gitter* genannt, werden von zwei Scharen von Streckenzügen mit der konstanten Seitenlänge s' bzw. s'' aufgespannt (Fig. 1). Die Maschen des Gitters sind Parallelogramme und zwar im allgemeinen windschiefe Parallelogramme. In jeder inneren Gitterecke stoßen vier Maschen zu-

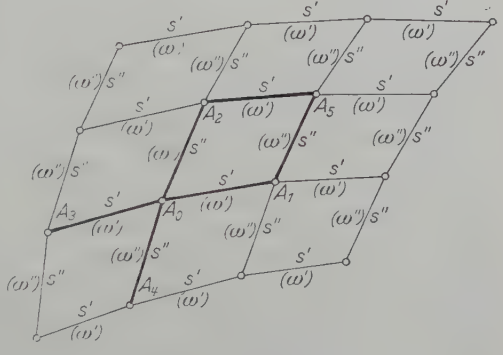

Fig. 1: *P*-Gitter

[1]) S. Finsterwalder: Mechanische Beziehungen bei der Flächenformation. Jahresberichte DMV 6, 1897.

[2]) R. Sauer: Geometrische Überlegungen zu den Grundgleichungen der Flächentheorie. Münchener Akademieberichte 1928. S. 100—103. Vergl. ferner

R. Sauer: Streifen- und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie usw. Math. Zeitschrift 48, 1942, S. 455—466.

sammen. Jede innere Gitterecke ist also Mittelpunkt eines Viererkreuzes. Es wird verlangt, daß alle diese Viererkreuze eben sind, d. h. daß die vier von einer inneren Gitterecke ausgehenden Gitterseiten jeweils in einer Ebene liegen. In den Randpunkten mit je drei Gitterseiten sollen diese auch jeweils in einer Ebene liegen.

Daß die elementargeometrischen Eigenschaften der so definierten P-Gitter gewissen differentialgeometrischen Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen analog sind, wird durch folgende Überlegung nahegelegt: Die pseudosphärischen Flächen sind dadurch gekennzeichnet, daß die beiden Scharen der Asymptotenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ ein Tschebytscheff-Netz bilden: d. h. die Kurvenfolgen $u = u_0 \pm m\varepsilon$, $v = v_0 \pm n\eta$ (m bzw. $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\varepsilon, \eta =$ positive Konstanten) erzeugen auf der Fläche ein i. allg. krummliniges Parallelogrammnetz. Ersetzt man in diesem Kurvennetz die krummlinigen Parallelogrammseiten durch ihre geradlinigen Sehnen, so erhält man ein Viereck sgitter mit i. allg. windschiefen Viereckmaschen und nichtebenen Viererkreuzen. Wir gehen nun durch Verkleinerung der Konstanten ε und η zu immer engmaschigeren Netzen über und betrachten den Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ unter Festhaltung des Verhältnisses $\varepsilon : \eta = \text{const} \neq 0$. Da die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ ein Tschebytscheff-Netz bilden, streben bei diesem Grenzprozeß die durch ε bzw. η dividierten Sehnenlängen zwei festen nicht verschwindenden Grenzwerten zu, d. h. das Viereck sgitter wird zu einem Parallelogrammgitter. Da die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ Asymptotenlinien sind, werden die von den Ebenen $(A_0A_1A_2)$, $(A_0A_2A_3)$, $(A_0A_3A_4)$ $(A_0A_4A_1)$ der Viererkreuze $A_0A_1A_2A_3A_4$ gebildeten Keilwinkel (Fig 1) in höherer Ordnung als ε und η klein, während die von den Ebenen $(A_0A_1A_2)$, $(A_2A_1A_3)$, $(A_1A_0A_3)$, $(A_2A_0A_3)$ der Gittermaschen $A_0A_1A_3A_2A_0$ gebildeten Keilwinkel i. allg. in derselben Ordnung wie ε und η klein werden, d. h. die Viererkreuze werden eben, die Gittermaschen dagegen nicht. Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Viereck sgitter der Sehnen eines von Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche gebildeten Kurvennetzes bei fortgesetzter Verengerung in P-Gitter übergehen.

Wir werden nunmehr die elementargeometrischen Eigenschaften der P-Gitter erörtern und ihnen jeweils die entsprechenden differentialgeometrischen Beziehungen der pseudosphärischen Flächen gegenüberstellen[3]). Zum Schluß werden wir diese Gegenüberstellung nachträglich durch einen Grenzprozeß ergänzen. Bei diesem Grenzprozeß erscheinen die Asymptotenliniennetze der pseudosphärischen Flächen als Limes von Folgen von P-Gittern und die elementargeometrischen Beziehungen der P-Gitter konvergieren gegen differentialgeometrische Beziehungen der pseudosphärischen Flächen.

[3]) Ein kurzer Hinweis auf einige dieser Beziehungen wurde in einem Vortrag des Verfassers bei der Mathematikertagung in Tübingen 1946 gegeben.

2. Bezeichnungen und Definitionen.

Neben den bereits benützten Bezeichnungen s', s'' für die Seitenlängen führen wir folgende weitere Bezeichnungen ein (Fig. 2):

Gitterwinkel α, β = Innenwinkel der Parallelogramme (paarweise gleich),

Krümmungswinkel $\varkappa'$, $\varkappa''$ = Winkel aufeinanderfolgender Seiten eines Streckenzuges (z. B. $\varkappa'_{A_0} = \sphericalangle A_3 A_0 \mid A_0 A_1$, $\varkappa''_{A_0} = \sphericalangle A_3 A_0 \mid A_0 A_2$),

Windungswinkel ω', ω'' = Winkel der Ebenen aufeinanderfolgender Viererkreuze (z. B. $\omega'_{A_0 A_1} = \sphericalangle A_2 A_0 A_1 \mid A_3 A_1 A_0$, $\omega''_{A_0 A_2} = \sphericalangle A_1 A_0 A_2 \mid A_3 A_2 A_0$). Dabei setzen wir voraus, daß das P-Gitter von einem ebenen Gitter kongruenter Parallelogramme so wenig abweicht, daß alle Winkel $\varkappa'$, $\varkappa''$, ω', ω'' hinreichend klein sind, etwa < 1. Die Winkel $\varkappa'$, $\varkappa''$ sind ohne Vorzeichen definiert und sollen stets von Null verschieden sein. Die Winkel ω', ω'' sind $\gtrless 0$, je nachdem die Fortschreitungsrichtung (z. B. $A_0 A_1$ oder $A_0 A_2$) mit der zugehörigen Drehung der Viererkreuzebenen eine Rechts- oder Linksschraubung bestimmt.

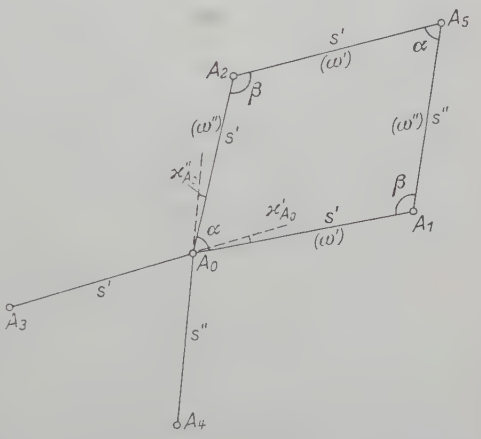

Fig. 2: Seitenlängen und Winkel im P-Gitter.

Die Quotienten

$$k' = \frac{\sin \varkappa'}{s'} \qquad \omega' = \frac{\sin \omega'}{s'}$$

(1) und

$$k'' = \frac{\sin \varkappa''}{s''} \qquad \omega'' = \frac{\sin \omega''}{s''}$$

bezeichnen wir als *Krümmungen* und *Windungen* der Streckenzüge des P-Gitters.

Wir ergänzen das P-Gitter zu einer Haut, indem wir in jeder Gittermasche ein Paraboloid aufspannen, und können dann eine positive und negative Seite des Gitters unterscheiden. Wir bezeichnen die Viererkreuzebenen als *Berührebenen* des Gitters und die zu ihnen senkrechten Einheitsvektoren auf der positiven Gitterseite als *Normalen* des Gitters. Wenn wir außerdem die Ebenen, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Seiten der Streckenzüge des Gitters bestimmt werden, als *Schmiegebenen* der Streckenzüge bezeichnen, gilt offenbar:

Die Berührebenen eines ebeneckigen Gitters sind identisch mit den Schmiegebenen der Streckenzüge des Gitters.

Die Berührebenen einer Fläche sind identisch mit den Schmiegebenen der Asymptotenlinien der Fläche.

Der rechts stehende Satz drückt den analogen differentialgeometrischen Sachverhalt aus.

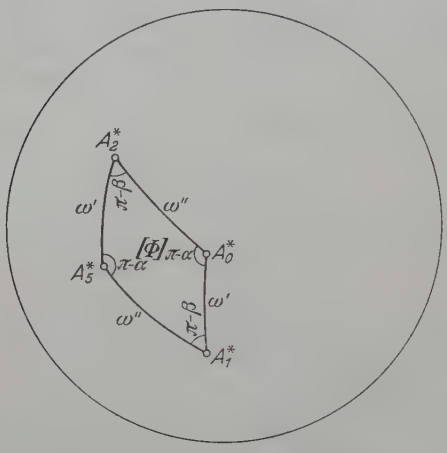

Fig. 3: Sphärisches Bild einer Masche eines *P*-Gitters.

Schließlich definieren wir ähnlich wie in der Flächentheorie mit Hilfe der Normalen des Gitters ein *sphärisches Bild* (Fig. 3):

Jeder Gitterecke A_ν ist ein Punkt A_ν^* der Einheitskugel zugeordnet. Jeder Gittermasche $A_0 A_1 A_5 A_2$ entspricht ein sphärisches Viereck $A_0^* A_1^* A_5^* A_2^*$ mit den Seiten ω', ω'' und den Innenwinkeln $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$. Die Gittermasche und das entsprechende Viereck im sphärische Bild werden in entgegengesetztem Sinn umlaufen (vergl. Ziff. 3). Wir bezeichnen mit $2F$ die Oberfläche des Tetraeders $A_0 A_1 A_5 A_2$ der Eckpunkte einer Gittermasche, mit Φ den Flächeninhalt des entsprechenden sphärischen Vierecks und definieren mittels

$$K = -\frac{2 \sin \Phi/2}{F} \tag{2}$$

das *Krümmungsmaß* der betreffenden Gittermasche.

3. Eigenschaften der P-Gitter.

Aus Symmetriegründen sind in einem windschiefen Parallelogramm ebenso wie in einem ebenen Parallelogramm je 2 Gitterwinkel gleich, z. B. $\sphericalangle A_0 = \sphericalangle A_5 = \alpha$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \beta$. Ferner sind die Windungswinkel an gegenüberliegenden Parallelogrammseiten gleich, z. B. $\omega'_{A_0 A_1} = \omega'_{A_2 A_5} = \omega'$, $\omega''_{A_0 A_2} = \omega''_{A_1 A_5} = \omega''$. Die beiden Windungswinkel ω', ω'' in einem windschiefen Parallelogramm haben stets entgegengesetztes Vorzeichen, woraus sich die in Ziff. 2 erwähnte Umkehrung des Umlaufsinnes bei der sphärischen Abbildung ergibt. Ebenso wie bei den Maschen des *P*-Gitters sind auch bei den Maschen des sphärischen Bildes die Seiten sowie die Innenwinkel paarweise gleich, die Maschen des sphärischen Bildes sind also sphärische Parallelogramme.

Die Winkel und Seiten eines windschiefen Parallelogramms sind verknüpft durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin \omega'}{s'} = -\frac{\sin \omega''}{s''}, \tag{3}$$

$$-\operatorname{tg} \frac{\omega'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega''}{2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{4}$$

Die erste Gleichung ergibt sich aus $h = s' \sin\beta \sin\omega'' = -s'' \sin\beta \sin\omega'$, wobei h den Abstand des Punktes A_3 von der Ebene $A_0 A_1 A_2$ bedeutet. Die zweite Gleichung erhält man aus dem sphärischen Viereck $A_0^* A_1^* A_3^* A_2^*$.

Für die Flächeninhalte F und Φ hat man

$$F = \tfrac{1}{2} s' s'' (\sin\alpha + \sin\beta), \quad \Phi = 2(\pi - \alpha - \beta). \tag{5}$$

Durch Einsetzen der Gln. (3), (4) und (5) in die Gln. (1) und (2) ergibt sich unmittelbar

$$\boxed{w' = -w''} \tag{6}$$

und

$$K = -\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2} s' s'' (\sin\alpha + \sin\beta)} = \frac{4 \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} \operatorname{tg}\frac{\omega''}{2}}{s' s''} = \frac{\sin\omega' \cdot \sin\omega''}{s' s'' \cos^2\frac{\omega'}{2} \cdot \cos^2\frac{\omega''}{2}}$$

also

$$\boxed{K = \frac{w' w''}{\cos^2\frac{\omega'}{2} \cdot \cos^2\frac{\omega''}{2}}}. \tag{7}$$

Durch wiederholte Anwendung der Gln. (3) bzw. (6) erkennt man, daß die Windungswinkel ω' bzw. ω'' und die Windungen w' bez. w'' nicht nur jeweils in einem Gitterparallelogramm, sondern in dem gesamten P-Gitter (Fig. 1) denselben konstanten Wert haben. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache liefern die Gln. (6) und (7) folgenden Satz, dem wir rechts den analogen differentialgeometrischen Satz gegenüberstellen:

In einem P-Gitter haben die Streckenzüge der einen Schar für alle Streckenzugseiten dieselbe konstante Windung w' und die Streckenzüge der anderen Schar die entgegengesetzt gleiche konstante Windung $w'' = -w'$.

Das Krümmungsmaß K hat für alle Gittermaschen denselben konstanten Wert und ist bis auf den konstanten Faktor

$$f = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega'}{2} \cos^2\frac{\omega''}{2}}$$

gleich dem Produkt $w' . w''$; für $\omega' \to 0$, $\omega'' \to 0$ wird $f = 1$ (vergl. Ziff. 7).

Wenn die Asymptotenlinien ein Tschebytscheff-Netz bilden, haben die Kurven der einen Schar dieselbe konstante Windung w' und die Kurven der anderen Schar die entgegengesetzt gleiche konstante Windung $w'' = -w'$.

Das Krümmungsmaß der Trägerfläche ist konstant und gleich dem Produkt $w' w''$ der Windungen der Asymptotenlinien; die Trägerfläche ist also eine pseudosphärische Fläche.

Für das sphärische Bild liefern die vorangehenden Überlegungen den weiteren Satz:

Das sphärische Bild eines P-Gitters ist ein sphärisches Parallelogrammgitter mit den konstanten Seitenlängen ω', ω''. Die Gitterseiten des P-Gitters sind senkrecht zu den Sehnen der entsprechenden Seiten des sphärischen Parallelogrammgitters. Der Umlaufsinn im P-Gitter ist dem Umlaufsinn im sphärischen Bild entgegengesetzt.

Bei der sphärischen Abbildung einer pseudosphärischen Fläche entspricht dem TSCHEBYTSCHEFF-Netz der Asymptotenlinien wieder ein TSCHEBYTSCHEFF-Netz. Entsprechende Tangenten beider Netze sind zueinander senkrecht. Der Umlaufsinn ist in den beiden Netzen entgegengesetzt.

4. Deformationen der P-Gitter mit Erhaltung der Streckenzugwindungen und der Gitterseiten.

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es möglich ist, ein vorgegebenes P-Gitter in ein anderes P-Gitter so zu deformieren, daß die Windungen der Streckenzüge ungeändert bleiben und außerdem entweder I) die Längen s', s'' der Gitterseiten oder II) die Gitterwinkel α, β sich nicht ändern.

Bei allgemeinen ebeneckigen Vierecksgittern, bei denen die Maschen nicht Parallelogramme, sondern allgemeine windschiefe Vierecke sind, gibt es analoge Deformationen nur in Spezialfällen. Bei den P-Gittern dagegen existieren, wie wir sehen werden, stets sowohl Deformationen (I) als auch Deformationen (II) und zwar kontinuierliche Scharen solcher Deformationen.

Wir betrachten zunächst den Fall (I), d. h. die Deformationen unter Festhaltung der Seitenlängen s', s'', und gehen dabei aus von einem vorgegebenen P-Gitter mit dem Randpolygon $ABCD$ (Fig. 4a,b). Wir

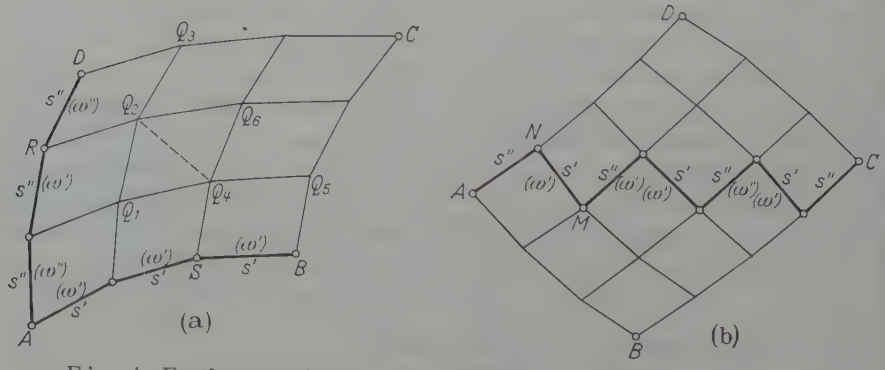

Fig. 4: Festlegung eines P-Gitters mit vorgegebenen Gitterseiten.

erhalten alle durch Deformationen (I) aus dem vorgegebenen Gitter entstehenden P-Gitter, indem wir entweder

a) die Rand-Streckenzüge AB und AD (— in Fig. 4a stark ausgezogen —) oder

b) den diagonalen Zickzackzug AC (— in Fig. 4b stark ausgezogen —) unter Festhaltung der Seitenlängen s', s'' und der Windungswinkel ω', ω'' beliebig deformieren. Man kann dann nämlich ausgehend von den gegebenen Streckenzügen die Gittermaschen Schritt für Schritt folgendermaßen konstruieren:

Wir nehmen an, die Gitterkonstruktion in Fig. 4a sei bereits bis an die Streckenzüge $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1Q_4Q_5$ durchgeführt. Um die Ecke Q_6 festzulegen, hat man das Dreieck $Q_2Q_4Q_6$ lediglich um die Seite Q_2Q_4 solange zu drehen, bis die Ecke Q_6 in die Berührebene Q_1Q_2R fällt. Dann hat die neu konstruierte Gittermasche $Q_1Q_4Q_6Q_2$ an der Seite Q_1Q_2 den vorgeschriebenen Windungswinkel ω'' und folglich nach Gl. (3) an der Seite Q_1Q_4 den Windungswinkel ω', d. h. Q_6 liegt auch in der Berührebene Q_1Q_4S. Dieselben Überlegungen gelten für Fig. 4b.

Im Fall (b) sind als bemerkenswerter Sonderfall die P-Gitter mit Drehsymmetrie und Schraubensymmetrie enthalten. Bei diesen gehen die Streckenpaare des diagonalen Streckenzuges aus dem ersten Streckenpaar ANM durch Drehungen bzw. Schraubungen einer diskontinuierlichen Gruppe hervor. Bei entsprechender Fortsetzung wird das gesamte P-Gitter durch diese Drehungen bzw. Schraubungen in sich transformiert.

Wir fassen die Ergebnisse in folgenden Sätzen zusammen unter Gegenüberstellung der analogen differentialgeometrischen Beziehungen:

a) Ein vorgegebenes P-Gitter kann unter Festhaltung der Längen der Gitterseiten und der Windungen der Streckenzüge und demnach auch des Krümmungsmaßes der Gittermaschen kontinuierlich so deformiert werden, daß es dabei stets P-Gitter bleibt. Die sich ergebenden P-Gitter sind jeweils festgelegt durch Vorgabe der Rand-Streckenzüge AB und AD, deren Seitenlängen und Windungswinkel stets dieselben sind wie beim Ausgangsgitter, deren Krümmungswinkel jedoch willkürlich gewählt werden dürfen.

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Festhaltung der Längen und Windungen der Asymptotenlinien und demnach auch des Krümmungsmaßes kontinuierlich deformiert werden, wobei die Fläche stets pseudosphärische Fläche bleibt. Die sich ergebenden pseudosphärischen Flächen sind (— in einem Asymptotenlinien-Viereck $ABCD$ —) jeweils festgelegt durch Vorgabe der beiden sich schneidenden Asymptotenlinien AB und AD, deren entgegengesetzt gleiche Windungen durch das Krümmungsmaß der Fläche bestimmt sind und deren Krümmungen willkürlich gewählt werden dürfen.

b) Ein vorgegebenes P-Gitter läßt sich unter Festhaltung der

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Fest-

Längen der Gitterseiten und der Windungen der Streckenzüge und demnach auch des Krümmungsmaßes der Gittermaschen in unendlich viele drehsymmetrische und schraubensymmetrische P-Gitter deformieren.

haltung der Längen und Windungen der Asymptotenlinien und demnach auch des Krümmungsmaßes in unendlich viele pseudosphärische Drehflächen und Schraubenflächen deformiert werden.

5. Deformationen der P-Gitter mit Erhaltung der Streckenzugwindungen und der Gitterwinkel.

Wir gehen nun zu den Deformationen des Falles (II) über, bei denen anstelle der Seitenlängen die Gitterwinkel ungeändert bleiben sollen.

Bezeichnet man mit $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$, $\bar{s}'$, $\bar{s}''$ die Windungswinkel und Seitenlängen der deformierten P-Gitter, so liefert die Forderung der Erhaltung der Windungen nach Gl. (3) die Bedingungen

$$\frac{\sin\bar{\omega}'}{\bar{s}'} = \frac{\sin\omega'}{s'} = w = \text{const},$$

(8)

$$\frac{\sin\bar{\omega}''}{\bar{s}''} = \frac{\sin\omega''}{s''} = -w = \text{const}.$$

Die Forderung der Erhaltung der Gitterwinkel führt nach Gl. (4) zur Bedingung

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}'}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}''}{2} = \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega''}{2} = c = \text{const}.$$

Die Bedingungen (8) und (9) werden erfüllt durch den Ansatz

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}'}{2} = \lambda\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}''}{2} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\omega''}{2},\\ &\bar{s}' = s'\cdot\frac{\sin\bar{\omega}'}{\sin\omega'} = \lambda s'\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2}},\\ &\bar{s}'' = s''\cdot\frac{\sin\bar{\omega}''}{\sin\omega''} = \frac{1}{\lambda}s''\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}}. \end{aligned}}$$

Er legt zusammen mit den gegebenen Gitterwinkeln α, β ein P-Gitter fest. Dabei ist $\lambda \neq 0$ ein beliebiger Parameter, $\lambda = 1$ entspricht dem Ausgangsgitter.

Für das Krümmungsmaß der Gittermaschen und die Krümmungen der Streckenzüge folgt aus den Gln. (7) und (1)

$$(11)\quad \bar{K} = K\,\frac{\cos^2\frac{\omega'}{2}\cdot\cos^2\frac{\omega''}{2}}{\cos^2\frac{\bar{\omega}'}{2}\cdot\cos^2\frac{\bar{\omega}''}{2}} = K\left(\cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}\right)$$

und

$$(12)\quad \begin{aligned}\bar{k}' &= \frac{\sin\varkappa'}{\bar{s}'} = \frac{1}{\lambda}\,k'\left(\cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2}\right),\\ \bar{k}'' &= \frac{\sin\varkappa''}{\bar{s}''} = \lambda\,k''\left(\cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}\right);\end{aligned}$$

in Gl. (12) ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß bei ungeänderten Gitterwinkeln α, β auch die Krümmungswinkel $\varkappa'$, $\varkappa''$ ungeändert bleiben.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(13)\quad g' = \cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2},\quad g'' = \cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}$$

und fassen die Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Ein vorgegebenes P-Gitter kann unter Festhaltung der Gitterwinkel und der Windungen der Streckenzüge in eine 1-parametrige Schar (Parameter λ) von P-Gittern deformiert werden. Dabei werden die Seitenlängen und Krümmungen der Streckenzüge und das Krümmungsmaß der Gittermaschen gemäß

$$\bar{s}' = \lambda\,s'\sqrt{g'},\quad \bar{s}'' = \frac{1}{\lambda}\,s''\sqrt{g''},$$

$$\bar{k}' = \frac{1}{\lambda}\,k'\,g',\quad \bar{k}'' = \lambda\,k''\,g'',$$

$$\bar{K} = K\,g'\,g''$$

verändert; für $\omega'\to 0$, $\omega''\to 0$ wird $g' = g'' = 1$ (vergl. Ziff. 7).

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Festhaltung der Schnittwinkel und Windungen der Asymptotenlinien in eine 1-parametrige Schar von pseudosphärischen Flächen deformiert werden (Parameter λ). Dabei ändern sich die Bogenlängen und Krümmungen der Asymptotenlinien gemäß

$$\bar{s}' = \lambda\,s',\quad \bar{s}'' = \frac{1}{\lambda}\,s',$$

$$\bar{k}' = \frac{1}{\lambda}\,k',\quad \bar{k}'' = \lambda\,k''.$$

Das Krümmungsmaß der Fläche bleibt ungeändert.

Diese Deformationen werden nach S. Lie[4]) benannt.

6. Parallele P-Gitter und V-Gitter.

Zu jedem P-Gitter lassen sich parallel bezogene sogenannte *V-Gitter* folgendermaßen konstruieren (Fig. 5):

[4]) Vergl. z. B. L. Bianchi: Geometria differenziale I. 2. Bologna 1927, § 249.

Jeder Seite des P-Gitters entspricht eine parallele Seite des V-Gitters. Den vier Seiten der (i. allg. windschiefen) Parallelogramm-Maschen des P-Gitters (z. B. 2, 8, 5, 11) entsprechen die vier Arme der (i. allg. nicht ebenen) Viererkreuze (z. B. 2*, 8*, 5*, 11*) des V-Gitters und den 4 Armen der stets ebenen Viererkreuze des P-Gitters (z. B. 1, 7, 2, 8) entsprechen die vier Seiten der stets ebenen Gittermaschen (z. B. 1*, 7*, 2*, 8*) des V-Gitters. Während also im P-Gitter die Viererkreuze eben und die Maschen i. allg. windschief sind, hat man im V-Gitter lauter ebene Viereckmaschen und i. allg. nicht ebene

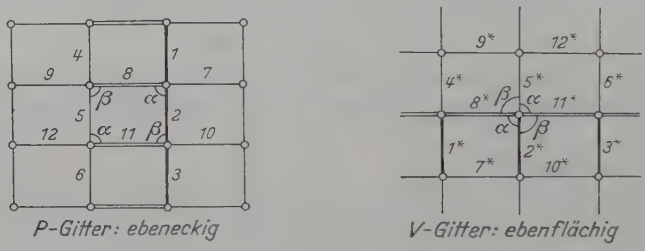

Fig. 5: Schematische Skizze paralleler P-Gitter und V-Gitter.

Viererkreuze. Den Seiten eines Streckenzugs des einen Gitters entsprechen im anderen Gitter Querseitenfolgen und umgekehrt (z. B. 1, 2, 3 und 1*, 2*, 3*).

Die Maschen des V-Gitters sind i. allg. nicht Parallelogramme. Die Viererkreuze der V-Gitter (Fig. 6) haben paarweise gleiche Kantenwinkel α, β, die den Gitterwinkeln des P-Gitters gleich sind, und paarweise gleiche Keilwinkel ω', ω'', welche den Windungswinkeln des P-Gitters gleich sind.

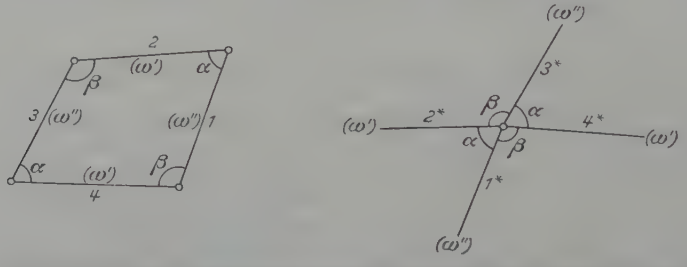

Fig. 6: Windschiefes Parallelogramm und paralleles scheitelwinkelgleiches Vierkant.

Zu einem vorgegebenen P-Gitter gibt es unendlich viele parallele V-Gitter. Eines dieser V-Gitter ist festgelegt, wenn man die Seitenlängen für 2 sich schneidende Streckenzüge vorschreibt. Die Seitenlängen haben nicht wie bei den P-Gittern zwei feste Werte s', s'', sondern sind i. allg. für alle Gitterseiten verschieden.

Die Viererkreuze der V-Gitter haben wegen der Gleichheit der Scheitelwinkel folgende besondere Eigenschaft: Die Schmiegebenen

der beiden sich im Kreuzmittelpunkt schneidenden Streckenzüge (z. B. die Ebenen 1* 3* und 2* 4* in Fig. 6) schneiden sich in der gemeinsamen Winkelhalbierenden der Streckenpaare 1* 3* und 2* 4*. Wir bezeichnen diese gemeinsamen Winkelhalbierenden als *Normalen* des Gitters und stellen einander gegenüber

die *V-Gitter*, beide denen die Gittermaschen ebenflächig sind und die Schmiegebenen der Streckenzüge durch die Normalen des Gitters hindurchgehen.

die *Voss-Flächen*[5]) mit einem konjugierten Kurvennetz, das von zwei Scharen geodätischer Linien (d. h. von Kurven, deren Schmiegebenen durch die Flächennormalen gehen) erzeugt wird.

Zu dieser Gegenüberstellung ist folgendes zu bemerken: In Ziff. 1 hatten wir festgestellt, daß die Sehnenviereckgitter der Asymptotenliniennetze bei unbegrenzter Verengerung gegen Viereckgitter mit ebenen Vierecken (und i. allg. nicht ebenen Vierecken) streben. Die Sehnenviereckgitter der konjugierten Kurvennetze streben umgekehrt gegen Viereckgitter mit ebenen Vierecken (und i. allg. nicht ebenen Vierecken).

Wir betrachten nun ein vorgegebenes *P*-Gitter und unterziehen dieses *P*-Gitter einer kontinuierlichen Deformation im Sinne von Ziff. 5 mit Festhaltung der Gitterwinkel. Zu jedem der bei diesen Deformationen entstehenden *P*-Gitter existieren parallele *V*-Gitter. Alle diese *V*-Gitter stimmen in den Kantenwinkeln überein und bei Festhaltung der Seitenlängen zweier sich schneidender Streckenzüge außerdem in den sämtlichen Seitenlängen. Es bleiben also sämtliche Viereckmaschen des *V*-Gitters nach Gestalt und Größe erhalten, d. h. die den *P*-Gittern parallel entsprechenden *V*-Gitter gehen durch kontinuierliche Verknikkungen auseinander hervor. Wir fassen zusammen:

Zu jeder Schar deformierter *P*-Gitter mit festgehaltenen Gitterwinkeln existiert eine Schar parallel bezogener *V*-Gitter, die durch Verknickung auseinander hervorgehen.

Zu jeder Schar durch Lie-Deformation im Sinne von Ziff. 5 aufeinander bezogener pseudosphärischer Flächen existiert eine Schar parallel bezogener Voss-Flächen, die durch Verbiegung auseinander hervorgehen.

7. Grenzübergang der P-Gitter in pseudosphärische Flächen.

Die in der vorliegenden Arbeit aufgezeigten Analogien zwischen den *P*-Gittern und *V*-Gittern einerseits und den pseudosphärischen

[5]) A. Voss: Über diejenigen Flächen, auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden. Münchener Akademieberichte 1888. Vergl. hierzu auch P. Stäckel: Über Biegungen und konjugierte Systeme. Mathem. Annalen 49, 1896, sowie
R. Sauer - H. Graf: Über Flächenverbiegung usw., Math. Ann. 105, 1931, S. 533.

Flächen und Voss'schen Flächen andrerseits sind begründet in der Möglichkeit, die P-Gitter durch einen Grenzprozess in die Asymptotenliniennetze der pseudosphärischen Flächen überzuführen. Wir definieren diesen Grenzprozeß folgendermaßen:

Vorgegeben sind zwei stetige Funktionen $k'(s) \neq 0$ und $k''(s) \neq 0$, eine Konstante $w \neq 0$ und ein Winkel $\alpha \neq 0$. Nach Wahl zweier hinreichend kleiner positiver Zahlen s' und s'' konstruieren wir sodann zwei Streckenzüge AB und AD mit den konstanten Seitenlängen und Windungen s' und w bzw. s'' und $(-w)$ sowie den Krümmungen $k'(s')$, $k'(2s')$, ..., $k'(ms')$ bzw. $k''(s'')$, $k''(2s'')$, ..., $k''(ns'')$. Wir legen diese beiden Streckenzüge (vergl. Fig. 4a) so in den Raum, daß sie den Punkt A gemeinsam haben und dort den Winkel α bilden; außerdem soll die Ebene des Winkels α mit der ersten Schmiegebene eines jeden der beiden Streckenzüge zusammenfallen. Wir konstruieren hierauf nach Ziff. 4 im Anschluß an die Streckenzüge AB und AD das P-Gitter $ABCD$ und wiederholen die ganze Konstruktion unbegrenzt oft mit fortgesetzter Halbierung der Seitenlängen s' und s''.

Bei diesem Grenzprozeß streben die Streckenzüge AB und AD gegen zwei Kurven, welche durch die natürlichen Gleichungen

$$k' = k'(s),\ w' = w = \text{const} \qquad \text{bzw.} \qquad k'' = k''(s),\ w'' = -w = \text{const}$$

gegeben sind und sich im gemeinsamen Anfangspunkt A unter dem Winkel α schneiden und in A dieselbe Schmiegebene haben. Ebenso streben alle anderen Streckenzüge der P-Gitter gegen Raumkurven mit stetiger Krümmung und konstanten, entgegengesetzt gleichen Windungen und gemeinsamen Schmiegebenen in den Schnittpunkten und liefern als Erzeugnis dieser Raumkurven eine Fläche.

Die Schmiegebenen, Windungen und Krümmungen der Streckenzüge der P-Gitter des oben angegebenen Grenzprozesses konvergieren gegen die Schmiegebenen, Windungen und Krümmungen der als Limes sich ergebenden Raumkurven, die Normalen und das Krümmungsmaß der P-Gitter konvergieren gegen die Normalen und das Krümmungsmaß der als Limes sich ergebenden Fläche; infolgedessen sind die Raumkurven Asymptotenlinien der Fläche und das Krümmungsmaß der Fläche ist konstant, d. h. die Fläche ist eine pseudosphärische Fläche. Die Windungswinkel ω', ω'' streben (— ebenso wie die Krümmungswinkel —) gegen Null, woraus sofort $f \to 1$ (vergl. Ziff. 3) und $g' \to 1$, $g'' \to 1$ (vergl. Ziff. 5) folgt.

Auf die Wiedergabe der Konvergenzbeweise für den Grenzprozeß, die keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bieten, soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Wenn man bei dem angegebenen Grenzprozeß zu den P-Gittern die parallel bezogenen V-Gitter mit hinzunimmt, erhält man gleichzeitig die Voss'schen Flächen als Limes von Folgen von V-Gittern.

(Eingegangen am 7. Oktober 1949.)

Über das Theorem von F. Schur in der Riemannschen Geometrie.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

E. Bompiani in Rom (Italien).

1. Diese Abhandlung verfolgt den Zweck, einen neuen Beweis des klassischen Theorems von F. Schur über die Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu geben: Wenn die Riemannsche Krümmung hinsichtlich einer Ebenenrichtung [1]) in jedem Punkt bei Änderung dieser Richtung konstant bleibt, so geschieht dies auch bei Änderung des Punktes selbst (d. h. die Mannigfaltigkeit hat konstante Krümmung). Die üblichen Beweise beruhen auf den Differentialidentitäten von L. Bianchi (für den Riemannschen Tensor) und beschränken sich im wesentlichen auf eine Probe; der folgende hat mehr geometrischen Charakter und ist hauptsächlich auf dem Parallelismus von T. Levi-Civita begründet.

Ich ergreife die Gelegenheit, auch einen mehr geometrischen Beweis der bekannten Tatsache zu geben, daß eine Hyperfläche eines Euklidischen Raumes nicht eine konstante negative Krümmung haben kann.

2. Es sei

$$ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i\,dx^k \tag{2.1}$$

die nicht entartete quadratische Form, die die Riemannsche Metrik definiert (alle Indizes laufen von 1 bis zur Dimension n der Mannigfaltigkeit).

Mit den üblichen Bezeichnungen seien außerdem

$$\Gamma_{ihk} = \tfrac{1}{2}(\partial_k g_{ih} + \partial_h g_{ik} - \partial_i g_{hk}), \tag{2.2}$$

$$\Gamma^i_{hk} = \tfrac{1}{2} g^{ri}(\partial_k g_{rh} + \partial_h g_{rk} - \partial_r g_{hk}) \tag{2.3}$$

die Christoffelschen Symbole 1-ter und 2-ter Art und

$$R_{hlk}{}^i = \partial_h \Gamma^i_{lk} - \partial_l \Gamma^i_{hk} + \Gamma^i_{ht}\Gamma^t_{lk} - \Gamma^i_{lt}\Gamma^t_{hk}, \tag{2.4}$$

$$R_{hl,ki} = g_{ri} R_{hlk}{}^r \tag{2.5}$$

die Komponenten des Riemannschen Tensors.

---

[1]) Oder Flächenelement, oder „F_2-Richtung". S. Duschek-Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Bd. II (Teubner, 1930), S. 127.

Eine aus einem Punkt der Mannigfaltigkeit ausgehende Ebenenrichtung sei durch zwei Geradenrichtungen ξ, η bestimmt, die wir orthogonal annehmen und die durch ihre Parameter ξ^i, η^i dargestellt werden. Es sei außerdem ζ mit den Parametern ζ^i eine beliebige Geradenrichtung, die ebenfalls vom Punkt ausgeht (Zentrum der Ebenenrichtung).

Die Krümmung des Flächenelementes ist bekanntlich

$$K = R_{hk,rs}\,\xi^h\,\eta^k\,\xi^r\,\eta^s. \tag{2.6}$$

Wir wollen die Variation δK berechnen, wenn sich das Flächenelement mit dem Parallelismus von Levi-Civita in der Richtung ζ verschiebt, im Verhältnis zum Bogenelement δs in dieser Richtung.

Da die Parallelverschiebung einer Richtung ξ längs einer Richtung ζ durch

$$\frac{\delta \xi^h}{\delta s} = -\Gamma^h_{pq}\,\xi^p\,\zeta^q \tag{2.7}$$

gegeben wird, so findet man leicht, daß die gesuchte Variation

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \Delta_e R_{hk,rs}\,\xi^h\,\eta^k\,\xi^r\,\eta^s\,\zeta^l \tag{2.8}$$

beträgt, worin

$$\Delta_l R_{hk,rs} = \partial_l R_{hk,rs} - R_{tk,rs}\,\Gamma^t_{lh} - R_{ht,rs}\,\Gamma^t_{lk} - R_{lk,ts}\,\Gamma^t_{lr} - R_{lk,rt}\,\Gamma^t_{ls} \tag{2.9}$$

die kovariante Ableitung von $R_{hk,rs}$ ist.

3. Die Beziehung (2.8) gibt die Möglichkeit, einige Probleme zu lösen, die sich spontan (für $n \geqq 3$) ergeben.

Wenn man ein Flächenelement (ξ, η) festlegt, so genügen die Richtungen ξ, für die die Variation der Krümmung Null ist, der in ζ^l linearen Gleichung

$$\Delta_l R_{hk\,rs}\,\xi^h\,\eta^k\,\xi^r\,\eta^s\,\zeta^l = 0. \tag{3.1}$$

Dies bedeutet:

Die Richtungen, für die die Variation der Krümmung eines bestimmten Flächenelementes Null ist, gehören einer Richtung von $n-1$ Dimensionen an (oder bilden ein lineares System ∞^{n-1}), das durch das Flächenelement bestimmt ist.

Man lege jetzt eine Richtung ξ und eine Richtung ζ fest und man frage, ob unter den Flächenelementen die durch ξ gehen, solche vorhanden sind, die ihre Krümmung bei Verschiebung in der Richtung ξ unverändert behalten.

Es handelt sich im Grunde darum, die η^i aus (3.1) zu bestimmen. Diese Gleichung ist in den η^i quadratisch; außerdem gehört die Richtung η, die senkrecht auf ξ genommen wurde, der $(n-1)$-dimensionalen Richtung S_{n-1} an, die ihrerseits senkrecht auf ξ ist. Daher beschreiben die gesuchten Richtungen η einen Kegel 2-ter Ordnung im S_{n-1}. Es ergibt sich also:

In einer Riemannschen Mannigfaltigkeit von $n \geqq 3$ Dimensionen existieren ∞^{n-3} Flächenelemente, die durch eine festgelegte Richtung ξ gehen und die auch bei Parallelverschiebung in einer gegebenen Richtung ζ zu Flächenelementen derselben Krümmung der Anfangselemente Anlaß geben. Diese Flächenelemente bilden einen quadratischen Kegel von der Dimension $n-1$, der ξ als Scheitel besitzt.

Hieraus folgt sofort das Schursche Theorem. Wenn man in der Tat ein Flächenelement mit dem Zentrum x betrachtet, kann man immer ein Flächenelement bezüglich des Punktes $x + \delta x\,(\delta x^i/\delta s = \xi^i)$ finden, das dieselbe Krümmung hat (wie wir gesehen haben, existieren ∞^{n-3} solche Flächenelemente). Wenn alle Flächenelemente durch $x + \delta x$ die gleiche Krümmung haben (d. h. wenn die Mannigfaltigkeit isotrop ist), so ist sie notwendigerweise gleich der Krümmung der Flächenelemente durch x. Und dies ist das Schursche Theorem.

5. Bezüglich des Kegels 2-ter Ordnung (Nr. 3) der Flächenelemente, die durch ξ gehen und derart sind, daß sie bei Verschiebung in der Richtung ξ ihre Krümmung unverändert behalten, kann man weitere invariante Begriffe einführen.

Wenn man ξ festlegt, so kann man nach den Richtungen ζ fragen, für die jener Kegel entartet ist (d. h. als Scheitel ein zweidimensionales Flächenelement hat).

Wenn man

$$\Phi_{ks}(\xi, \zeta) = \Phi_{sk}(\xi, \zeta) = \Delta_l R_{hk,rs}\, \xi^h \xi^r \zeta^l$$

setzt, genügen die gesuchten Richtungen ζ der Gleichung

$$\text{Det. } \Phi_{ks}(\xi, \zeta) = 0,$$

d. h. ihr geometrischer Ort ist ein Kegel n-ter Ordnung.

Dieser Kegel ist ein geometrisches Gebilde, das an eine Richtung (nämlich ξ) gebunden ist.

Wenn die Richtung ξ *nicht* festgelegt ist, kann man der letzten Gleichung genügen, in dem man $\xi = \zeta$ setzt; man hat einen Kegel der Ordnung $3n$, der nur vom Punkt (und seiner Umgebung 4-ter Ordnung) abhängt.

Jede Erzeugende dieses Kegels ist dadurch gekennzeichnet, daß der Kegel der durch sie gehenden Flächenelemente, die bei Verschiebung in der Richtung der Erzeugenden ihre Krümmung unverändert behalten, entartet ist.

6. Ich benutze die Gelegenheit, um einen geometrischen Beweis der bekannten Tatsache zu geben, daß eine V_n im euklidischen S_{n+1} nicht konstante negative Krümmung haben kann.

Man beachte vor allem, daß eine geodätische Kalotte 2-ter Ordnung mit gegebener Richtung (d. h. der die Elemente 2-ter Ordnung der geodätischen, an jene Ebenen-Richtung tangentialen Linien angehören) in einem S_3 liegt: und zwar dem durch die Richtung und die Normale

auf V im Punkte, dem Zentrum dieser Richtung bestimmten S_3. Diese Kalotte besitzt daher (wie jede Kalotte des S_3) zwei asymptotische Tangenten, die der Schnitt ihrer Tangentialebene mit dem Asymptotenkegel der V_n im Punkt ist.

Diese Tangenten sind reell und verschieden, wenn die Kalotte negative Krümmung hat und umgekehrt; und diese Krümmung ist die Riemannsche Krümmung des V_n nach der Richtung der Kalotte.

Wenn im Punkt eine Richtung mit negativer Krümmung vorhanden ist, so hat jener Asymptotenkegel sicherlich reelle Erzeugende. Dann bestimmt aber ein S_3 durch die Normale der V im Punkt und durch eine Tangentialebene längs einer dieser Erzeugenden an den Asymptotenkegel eine Kalotte verschwindender Krümmung. Und dies schließt die Möglichkeit aus, daß für alle Richtungen die Krümmung negativ ist. Es folgt sogar:

Wenn in einem Punkt einer V_n eines euklidischen S_{n+1} eine Richtung negativer Krümmung vorhanden ist, so existieren sicher auch Richtungen mit verschwindender und mit positiver Krümmung.

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Gottfried Köthe in Mainz.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit [2] führen J. Dieudonné und L. Schwartz eine Klasse lokalkonvexer linearer topologischer Räume ein, die sie Räume vom Typus (LF) nennen. Die Vollständigkeit dieser Räume wird unter Heranziehung tiefliegender Sätze aus der Theorie der lokalkonvexen Räume bewiesen. Es ist das Ziel der vorliegenden Note, diesen Satz auf einem einfachen Wege zu beweisen, der es erlaubt, die Frage der Vollständigkeit gleich für eine allgemeinere Klasse lokalkonvexer Räume zu untersuchen. Wir benützen im Wesentlichen die Terminologie von [2].

Es sei $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ eine echt aufsteigende Folge komplexer linearer lokalkonvexer Räume [1]) mit den Topologien $\mathfrak{T}_n$ und es sei die durch $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n induzierte Topologie nicht feiner als $\mathfrak{T}_n$. Dann läßt sich in der Vereinigungsmenge E der E_n, die wieder ein linearer Raum ist, folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}$ einführen. Sind $W_1, W_2, \ldots$ absolutkonvexe Umgebungen der 0 in $E_1, E_2, \ldots$ bezüglich der Topologien $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$, so bilde man die absolutkonvexe Hülle $W = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} W_n$ der Vereinigungsmenge der W_n. Alle so entstehenden Mengen W werden als Umgebungen der 0 in E eingeführt und bestimmen offenbar in E eine Topologie $\mathfrak{T}$, durch die E lokalkonvex wird.

$\mathfrak{T}$ ist die feinste aller lokalkonvexen Topologien $\mathfrak{T}^*$ von E, die in jedem E_n eine weniger feine Topologie als $\mathfrak{T}_n$ induzieren:

Ist nämlich V eine absolutkonvexe Umgebung der Null in $\mathfrak{T}^*$, so ist $V_n = V \cap E_n$ eine absolutkonvexe Umgebung in $\mathfrak{T}_n$, also $V = \overset{}{\underset{n}{\Gamma}} V_n$. Die durch die Menge *aller* $\overset{}{\underset{n}{\Gamma}} W_n$, W_n eine absolutkonvexe Umgebung der Null in $\mathfrak{T}_n$, erzeugte Topologie $\mathfrak{T}$ ist also feiner als $\mathfrak{T}^*$.

Wir wollen den so definierten lokalkonvexen Raum E als die *lokalkonvexe Hülle* der monoton wachsenden Folge E_n bezeichnen. Diese

[1]) Ein komplexer linearer Raum heißt lokalkonvex, wenn er ein linearer topologischer Raum ist mit einer Umgebungsbasis $\{W\}$ aus absolutkonvexen W (d. h. mit x, y sind auch alle $\alpha x + \beta y$ in W, α, β komplex, $|\alpha| + |\beta| \leqq 1$). Die Ergebnisse dieser Note gelten auch für reelle lokalkonvexe Räume, man hat dann stets symmetrische konvexe Umgebungen zu betrachten.

Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition der Räume vom Typus (LF), die die lokalkonvexe Hülle einer Folge von lokalkonvexen Räumen E_n vom Typus (F) sind unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n jeweils genau die Topologie $\mathfrak{T}_n$ induziert. Für Räume vom Typus (LF) wird in [2] bewiesen, daß sie separiert sind (prop. 2). Dieser Beweis gilt auch noch für den Fall, daß die E_n nur als separiert und vollständig vorausgesetzt werden und die in E_n durch $\mathfrak{T}_{n+1}$ induzierte Topologie $\mathfrak{T}_n$ ist.

Wann die lokalkonvexe Hülle separierter E_n wieder separiert ist, ist noch ungeklärt. In vielen Fällen ist sie es jedenfalls, so z. B. wenn die E_n vollkommene Räume sind und die Vereinigung in ω vollzogen wird (vgl. etwa [3]).

Wir erinnern daran, daß ein linearer separierter topologischer Raum E vollständig heißt, wenn jeder Cauchyfilter in E einen Limes in E hat (vgl. [1]). Es gilt nun der

Satz. *Ist der separierte lokalkonvexe Raum E die lokalkonvexe Hülle der Folge $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ separierter lokalkonvexer Räume E_n, so ist E dann und nur dann vollständig, wenn für jedes n jeder Cauchyfilter in E mit einer nur aus Teilmengen von E_n bestehenden Filterbasis in einem geeigneten E_{n+k} einen Limes hat.*

Die Bedingung ist offenbar notwendig. Sie sei umgekehrt erfüllt. Ist dann ein Cauchyfilter in E gegeben, so enthält er zu jeder absolutkonvexen Umgebung W der Null wenigstens eine Menge F_W, die klein von der Ordnung W ist, d. h. $x - y \in W$ für alle x, y aus F_W. Zu jeder solchen Menge F_W bilden wir die Menge F'_W aller y mit $y - x \in W$, x irgend ein Element aus F_W. Dann ist F'_W klein von der Ordnung $3W$, denn für y_1, y_2 aus F'_W gilt $y_1 - y_2 = (y_1 - x_1) + (x_1 - x_2) - (y_2 - x_2)$ mit $x_1, x_2 \in F_W$ und jeder der drei Summanden liegt in W. Der Durchschnitt zweier F'_{W_1} und F'_{W_2} enthält die aus $F_{W_1} \cap F_{W_2} = F$, einer Menge des Filters klein von der Ordnung $W_1 \cap W_2$, gebildete Menge $F'_{W_1 \cap W_2}$. Da die Umgebungen $3W$ eine Umgebungsbasis bilden, wenn W alle absolutkonvexen Umgebungen der Null durchläuft, hat der gegebene Filter auch die Menge aller F'_W als Basis.

Wir betrachten die Menge aller $F'_W \cap E_n$ für festes n. Sind alle $F'_W \cap E_n \neq 0$, so bilden sie eine Filterbasis, deren Mengen Teilmengen von E_n sind. Nach Voraussetzung hat dieser Filter einen Limes in einem E_{n+k}. Wir können daher annehmen, daß dies für kein n zutrifft. Dann gibt es also eine Folge $W^{(1)} \supset W^{(2)} \supset \ldots$ von absolutkonvexen Umgebungen der Null in E und dazu Mengen $F^0_{W^{(i)}}$ mit

$$F'^{(0)}_{W^{(i)}} \cap E_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Wir setzen $W^{(i)} \cap E_n = W^{(i)}_n$, $W^{(i)}_n$ ist absolutkonvex und ist eine Nullumgebung von E_n bezüglich $\mathfrak{T}_n$. Wir bilden die Umgebungen

$$V^{(i)} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2} W^{(1)}_1 \cup \tfrac{1}{2} W^{(2)}_2 \cup \ldots \cup \tfrac{1}{2} W^{(i-1)}_{i-1} \cup W^{(i)}\right),$$

wobei wieder Γ' die absolutkonvexe Hülle bedeutet. Wir behaupten, daß für jede Menge $F_{V^{(i)}}$ auch

$$F'_{V^{(i)}} \cap E_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

gilt.

Da $F_{V^i} \cap F^{(i)}_{W^{(i)}} \neq 0$ ist, liegt in $F_{V^{(i)}}$ ein Element x_0 aus $F^{(i)}_{W^{(i)}}$. Jedes Element aus $F_{V^{(i)}}$ hat also die Form:

$$x_0 + \sum_{k=1} \alpha_k x_k, \quad x_k \in \tfrac{1}{2} W_k^{(k)} \text{ für } k < i, \quad x_i \in \tfrac{1}{2} W^{(i)}, \quad \sum_1^i |\alpha_k| \leqq 1 .$$

Also hat jedes Element z aus $F'_{V^{(i)}}$ die Form $z = x_0 + \sum_1^i \alpha_k x_k + \sum_1^i \alpha'_k x'_k$, $\sum_1^i \alpha'_k x'_k$ ebenfalls ein Element aus $V^{(i)}$. Nun ist

$$\alpha_i x_i + \alpha'_i x'_i \in \tfrac{1}{2} W^{(i)} + \tfrac{1}{2} W^{(i)} \subset W^{(i)},$$

also ist, da $x_0 \in F^0_{W^{(i)}}$ ist, wegen (1) das Element $x_0 + \alpha_i x_i + \alpha'_i x'_i$ nicht in E_i. Andererseits liegt $\sum_1^{i-1} \alpha_k x_k + \sum_1^{i-1} \alpha'_k x'_k$ in E_{i-1}, also liegt auch z nicht in E_i, damit ist (2) bewiesen.

Wir bilden nun die absolutkonvexe Umgebung $U = \Gamma \sum_n \tfrac{1}{2} W_n^{(n)}$. Es ist $U \subset V^{(i)}$ für jedes i. Zu U gibt es eine Filtermenge F_U. Sei z_i aus E_i in F_U. Wir behaupten, daß dann $F_{V^{(i)}} \cap F_U = 0$ ist im Widerspruch zur Filtereigenschaft:

Ist $y \in F_{V^{(i)}}$, so enthält $y + V^{(i)}$ wegen (2) kein Element aus E_i, also ist $z_i - y \bar{\in} V^{(i)}$, also $z_i - y \bar{\in} U$, $y \bar{\in} F_U$, $F_{V^{(i)}} \cap F_U = 0$.

Folgerung. *Jeder Raum vom Typus (LF) ist vollständig.*

In einem Raum vom Typus (LF) induziert nach [2], prop. 2 die Topologie $\mathfrak{T}$ in jedem E_n die Topologie $\mathfrak{T}_n$, jeder Cauchyfilter mit einer Basis, deren Mengen Teilmengen von E_n sind, erzeugt also in E_n einen Cauchyfilter, der wegen der Vollständigkeit des (F)-Raumes E_n einen Limes bereits in E_n hat, aus dem Satz ergibt sich damit die Folgerung.

Dieselbe Schlußweise ergibt allgemeiner, daß die lokalkonvexe Hülle vollständiger $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ vollständig ist, wenn $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n die Topologie $\mathfrak{T}_n$ induziert.

Nicht jeder separierte lokalkonvexe Raum E, der die lokalkonvexe Hülle einer Folge $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ von Räumen vom Typus (F) ist, ist vollständig, wie das folgende Beispiel zeigt, das in Analogie zu einem Beispiel in [4] § 2 gebildet ist.

Es sei $\mathfrak{d}^{(n)}$ der Vektor $\{1, n, n^2, n^3, \ldots\}$, ferner

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}^{(1)} &= \{\mathfrak{d}^{(1)}, \mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\} \\
\mathfrak{b}^{(2)} &= \{\mathfrak{d}^{(2)}, 2\,\mathfrak{d}^{(1)}, 2^2\mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{b}^{(n)} &= \{\mathfrak{d}^{(n)}, n\,\mathfrak{d}^{(n-1)}, \ldots, n^{n-1}\mathfrak{d}^{(2)}, n^n\mathfrak{d}^{(1)}, n^{n+1}\mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\} .
\end{aligned}$$

Die k-te Koordinate des i-ten Vektors aus $\mathfrak{b}^{(n)}$ werde mit $\beta_{ik}^{(n)}$ bezeichnet.

E_n sei der Raum aller Vektoren $\mathfrak{x} = \{\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots; \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots; \ldots\}$ mit konvergentem $\lim_{(i,k)\to\infty} \frac{\xi_{ik}}{\beta_{ik}^{(n)}}$, wobei die (i, k) irgendwie in eine Folge geordnet seien. Durch die Metrik $|\mathfrak{x}| = \sup \frac{|\xi_{ik}|}{\beta_{ik}^{(n)}}$ wird E_n isomorph dem (F)-Raum der konvergenten Folgen. E sei die lokalkonvexe Hülle der E_n, die offenbar separiert ist.

Der Vektor $\mathfrak{f} = \{1, -1, 1, \ldots; 1, -1, 1, \ldots; \ldots\}$ liegt in keinem E_n, wie leicht zu sehen, also nicht in E. Ist N eine endliche Menge von Indizespaaren (i, k), so sei $\mathfrak{f}_N$ der Vektor, der auf den Indizespaaren (i, k) aus N dieselben Koordinaten wie $\mathfrak{f}$ hat, sonst gleich 0 ist. N_i durchlaufe speziell die Folge der endlichen Abschnitte der in eine Folge geordneten Indizespaare (i, k). Alle $\mathfrak{f}_{N_i}$ liegen als Nullfolgen sogar in E_1.

Wir zeigen, daß die Folge $\mathfrak{f}_{N_i}$ in E konvergent ist. Ist $B_{\varepsilon n}^{(n)}$ die Menge aller $\mathfrak{x}$ aus E_n mit $|\xi_{ik}| \leqq \varepsilon_n \beta_{ik}^{(n)}$, so bilden alle Mengen $\Gamma_n B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ eine Basis der Umgebungen der Null in E. Sei ein festes solches $\Gamma_n B_{\varepsilon n}^{(n)}$ gegeben. Da die $\mathfrak{f}_{N_i}$ nur $+1$ und -1 als Koordinaten haben, gibt es ein $k > 0$, so daß der k-te Restvektor $\{0, \ldots, 0, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots\}$ jedes Vektors $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j} = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots\}$ in $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_2}^{(2)}$ liegt. Ferner gibt es dann endlich viele Indizes in den ersten $k-1$ Abteilungen, so daß die $(k-1)$-ten Anfangsvektoren $\{\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_{k-1}, 0, 0, \ldots\}$ aller $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j}$, deren N_i und N_j diese endlich vielen Indizes umfassen, in $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_k}^{(k)}$ liegen (denn in den ersten $k-1$ Abteilungen wachsen ja die Koordinaten von $\mathfrak{b}^{(k)}$ jeweils über alle Grenzen). Also ist jedes $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j}$ von einem i_0 ab Summe zweier Nullfolgen aus $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_2}^{(2)}$ bzw. $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_k}^{(k)}$, also in $\Gamma_n B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ gelegen, d. h. $\mathfrak{f}_{N_i}$ ist konvergent in E.

Eine in E konvergente Folge kann als Limes nur den koordinatenweisen Limes haben, also könnte nur $\mathfrak{f}$ der Limes von $\mathfrak{f}_{N_i}$ sein, E ist also unvollständig.

Literaturverzeichnis.

N. Bourbaki.

[1] Éléments de mathématique II, Actualités sc. et industr. Nr. 858, Paris 1940.

J. Dieudonné und L. Schwartz.

[2] La dualité dans les espaces (F) et (LF), erscheint in den Ann. de l'Université de Grenoble.

G. Köthe und O. Toeplitz.

[3] Lineare Koordinatenräume und Ringe unendlicher Matrizen. Journ. f. reine angew. Math. **171** (1934), S. 193—226.

G. Köthe.

[4] Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Zeitschrift **51** (1948), S. 317—345.

(Eingegangen am 26. November 1949.)

On a summation method of O. Perron[1]).

Oskar Perron to his 70th birthday on May 7, 1950.

By

Otto Szász at Los Angeles (USA.)

Presented to the American Mathem. Society, November 26, 1949.

1. Some thirty years ago O. Perron [Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Math. Zeitschrift 6, 1920, pp. 286—310] discussed an important class of summability methods, which contains for a special case the transform

$$(1.1)\qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\lambda}\cdot\frac{x+1}{x+\lambda+1}\cdots\frac{x+\nu-1}{x+\lambda+\nu-1} = \varphi_\lambda(x),\ \lambda>0.$$

The generalized sum of a series $\sum_0^\infty a_\nu$ is $\lim_{x\to\infty}\varphi_\lambda(x)=s$, whenever this limit exists. We may restrict x to positive integral values.

For $\lambda=1$

$$\varphi_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\nu},$$

for $\lambda=2$

$$\varphi_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)};$$

in general

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu \frac{\Gamma(x+\lambda)\,\Gamma(x+\nu)}{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\lambda+\nu)}.$$

We shall call the series $\sum a_\nu$ φ_λ-summable to s, if $\lim_{x\to\infty}\varphi_\lambda(x)=s$. We have for $x>0$

$$(1.2)\qquad \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\lambda)} = B(\lambda,x) = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}\,d\varrho}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} = \int_0^1 \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1}\,d\varrho,$$

hence

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{B(\lambda,x)}\sum_0^\infty a_\nu B(\lambda,x+\nu) = \frac{1}{B(\lambda,x)}\sum_0^\infty a_\nu \int_0^1 \varrho^{x+\nu-1}(1-\varrho)^{\lambda-1}\,d\varrho.$$

Lemma 1. If the series $\sum_1^\infty a_\nu B(\lambda,x+\nu)$ converges for some $x=x_0>0$, then it converges uniformly for all $x\geqq 0$.

[1]) The preparation of this paper was sponsored (in part) by the Office of Naval Research.

We have

$$\sum_1^\infty a_\nu B(\lambda, x+\nu) = \sum_1^\infty a_\nu B(\lambda, x_0+\nu) \frac{B(\lambda, x+\nu)}{B(\lambda, x_0+\nu)};$$

let

$$\frac{B(\lambda, x+\nu)}{B(\lambda, x_0+\nu)} = q_\nu(x),$$

then

$$q_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(x+n)}{\Gamma(x+\lambda+n)} \cdot \frac{\Gamma(x_0+\lambda+n)}{\Gamma(x_0+n)\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x_0+n)} \cdot \frac{\Gamma(x_0+\lambda+n)}{\Gamma(x+\lambda+n)},$$

hence

$$q_n(x) - q_{n-1}(x) = q_{n-1}(x)\left\{\frac{x+n}{x_0+n} \cdot \frac{x_0+\lambda+n}{x+\lambda+n} - 1\right\}$$

$$= \lambda(x-x_0)\frac{q_{n-1}(x)}{(x_0+n)(x+\lambda+n)}.$$

It follows that for $x > x_0$ $q_n(x)$ increases and for $0 \leqq x < x_0$ $q_n(x)$ decreases, as n increases.

It is kwown that

$$\Gamma(x+n) \sim n^x \Gamma(n), \qquad (n \to \infty) \tag{1.3}$$

hence $B(\lambda, x+n) \sim \Gamma(\lambda) n^{-\lambda}$, and $q_n(x) \to 1$, as $n \to \infty$. The lemma now follows from a well-known theorem [cf. Knopp, Theory and application of infinite series, p. 346].

Lemma 2. If (1. 1) converges for some $x = x_0 > 0$ and some $\lambda = \lambda_0 > 0$, then it converges for all $x > 0$ and all $\lambda > \lambda_0$.

For a given $x = x_0$ (1. 1) is a factorial series in λ, hence being convergent for $\lambda = \lambda_0$ it converges for all $\lambda > \lambda_0$. Together with Lemma 1 this proves Lemma 2.

Lemma 3. If (1. 1) converges for $\lambda \geqq \lambda_0$, then

$$\sum_0^\infty a_\nu B(\lambda, x+\nu) = \int_0^1 \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1} g(\varrho)\, d\varrho, \qquad \lambda \geqq \lambda_0 \tag{1.4}$$

where

$$\sum_0^\infty a_\nu \varrho^\nu = g(\varrho).$$

Here $a_n n^{-\lambda_0} \to 0$ $(n \to \infty)$ [in view of the convergence of (1. 1 and formula (1. 3)].

For large λ the series $\sum_0^\infty \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1} a_\nu \varrho^\nu$ is uniformly convergent in $0 \leqq \varrho \leqq 1$ [2]), hence (1. 4) holds for large λ and represents an analytic function of λ. Hence (1. 4) holds in the entire domain of existence of both sides, in particular for $\lambda \geqq \lambda_0$.

[2]) To prove it, replace a_n by n^{λ_0} and calculate the maximum with respect to ϱ of the general term.

If we write

$$\sum_0^\infty a_\nu \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu = f(\varrho), \tag{1.5}$$

then

$$B(\lambda, x)\ \varphi_\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}}\ f(\varrho)\ d\varrho. \tag{1.6}$$

This expression may exist even if (1. 1) diverges for all x. We shall say that the series $\sum a_\nu$ is φ_λ^* summable to s, if $\varphi_\lambda(x)$ is defined by (1. 6), and if

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_\lambda(x) = s.$$

Changing the integration variable we find the LAPLACE integral representations:

$$B(\lambda, x)\ \varphi_\lambda(x) = \int_0^\infty (1-e^{-t})^{\lambda-1}\ g(e^{-t})\ e^{-tx}\ dt$$

$$= \int_0^\infty (1-e^{-u})^{x-1}\ g(1-e^{-u})\ e^{-\lambda u}\ du.$$

2. Theorem 1. *If $\sum a_\nu$ is ABEL summable, then it is φ_λ^*-summable for any $\lambda > 0$ to the same value.*

For the proof we employ the following lemma [cf. HARDY, Divergent series 1949, Theorem 6, p. 50]:

Lemma 4. In order that $s(\varrho) \to s$ $(\varrho \to \infty)$ should imply

$$T(x) = \int_0^\infty c(x, \varrho)\ s(\varrho)\ d\varrho \to s \qquad (x \to \infty)$$

for every bounded $s(\varrho)$, it is sufficient that

$$\int_0^\infty |c(x, \varrho)|\ d\varrho < H,$$

where H is independent of x, that

$$\int_0^y |c(x, \varrho)|\ d\varrho \to 0, \quad \text{when } x \to \infty,$$

for every finite y, and that

$$\int_0^\infty c(x, \varrho)\ d\varrho \to 1, \quad \text{when } x \to \infty.$$

In our case the conditions of Lemma 4 are easily verified; this proves Theorem 1.

The following theorem is immediate:

Theorem 2. *If the series* (1. 1) *converges, then* q_λ^* *summability implies* φ_λ *summability.*

3. In this section we shall prove the theorem:

Theorem 3. *If* $\sum a_\nu$ *is* (C, λ) *summable, then it is* φ_λ *summable.*

Let

$$(1-z)^{-\lambda-1} = \sum_0^\infty \gamma_n^\lambda z^n,$$

so that

$$(3.1)\quad \gamma_n^\lambda = \binom{n+\lambda}{n} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)}{n!} = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n+1)} \sim \frac{n^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

We define

$$(3.2)\quad s_n^\lambda = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{n-\nu}^\lambda a_\nu,$$

then

$$(C, \lambda)\sum_0^\infty a_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^\lambda}{\gamma_n^\lambda}.$$

We may assume without loss of generality that $(C, \lambda)\sum a_\nu = 0$, so that

$$(3.3)\quad s_n^\lambda = o(n^\lambda) \quad (n \to \infty).$$

The inversion of formula (3. 2) is

$$(3.4)\quad a_n = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} s_\nu^\lambda.$$

The differences of order k of a sequence $B_\nu, B_{\nu+1}, \ldots$ are defined by

$$\Delta^k B_\nu = \sum_{n=\nu}^\infty \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-1} B_n = \sum_{p=0}^\infty \gamma_p^{-k-1} B_{p+\nu}.$$

We first show that under the assumption (3. 3) the series (1. 1) converges and

$$(3.5)\quad \sum_0^\infty a_n B(\lambda, x+n) = \sum_0^\infty s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n).$$

We have, using (3. 4)

$$(3.6)\quad \sum_{n=0}^m a_n B(\lambda, x+n) = \sum_{\nu=0}^m s_\nu^\lambda \sum_{n=\nu}^m \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} B(\lambda, x+n).$$

If λ is a positive integer, then

$$(3.7)\quad \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = \sum_{p=0}^\infty \gamma_p^{-\lambda-2} B(\lambda, x+p+\nu)$$

reduces to a finite sum. If $\lambda > 0$ is not an integer, then

$$\gamma_p^{-\lambda-2} = 0(p^{-\lambda-2}) \qquad (p \to \infty)$$

and

$$B(\lambda, x+n) = 0(n^{-\lambda}) \qquad (n \to \infty)$$

hence the series in (3. 7) converges absolutely, and

$$\sum_{n=\nu}^{m} \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} B(\lambda, x+n) = \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - \sum_{m-\nu+1}^{\infty} \gamma_p^{-\lambda-2} B(\lambda, x+p+\nu)$$

$$= \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - R_{m-\nu}, \text{ say.}$$

Thus, from (3. 6)

$$\sum_{n=0}^{m} a_n B(\lambda, x+n) = \sum_{\nu=0}^{m} s \ \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} s_\nu^\lambda R_{m-\nu}. \tag{3. 8}$$

Now

$$R_{m-\nu} = O\left(\sum_{m-\nu}^{\infty} p^{-\lambda-2}(p+\nu)^{-\lambda}\right) = O\left(m^{-\lambda} \sum_{m-\nu}^{\infty} p^{-\lambda-2}\right) = O\left\{m^{-\lambda}(m-\nu+1)^{-\lambda-1}\right\},$$

hence, in view of (3. 3)

$$\sum_{0}^{m} s_\nu^\lambda R_{m-\nu} = o\left\{\sum_{0}^{m} (\nu+1)^\lambda m^{-\lambda} (m-\nu+1)^{-\lambda-1}\right\}$$

$$= o\left(m^{-\lambda} \sum_{\nu \leqq \frac{m}{2}} + m^{-\lambda} \sum_{\frac{m}{2} < \nu \leqq m}\right) \tag{3. 9}$$

$$= o(m^{-\lambda-\lambda-1} m^{\lambda+1} + m^{-\lambda} m^\lambda) = o(1) \qquad (m \to \infty).$$

Furthermore, using (1. 2)

$$\Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = \Delta^{\lambda+1} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x+\nu-1}}{(1+\varrho)^{x+\nu+\lambda}} \, d\varrho$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \Delta^{\lambda+1} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu d\varrho = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left(\sum_0^\infty \gamma_p^{-\lambda-2} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^{p+\nu}\right) d\varrho$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu \left(1 - \frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^{\lambda+1} d\varrho = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x+\nu-1} \, d\varrho}{(1+\varrho)^{x+2\lambda+\nu+1}}.$$

It follows that

$$\Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = B(2\lambda+1, x+\nu) = O(\nu^{-2\lambda-1}) \qquad (\nu \to \infty),$$

hence $\sum_{n=0}^{\infty} s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n)$ is absolutely convergent.

Finally, from (3. 8) and (3. 9) it follows that

$$\sum_0^\infty a_n B(\lambda, x+n) = \sum_0^\infty s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n),$$

and both series are convergent.

But (C, λ) summability implies Abel summability, and Theorem 1 and 2 yield φ_λ summability. This completes the proof of Theorem 3.

4. Perron (1. c. Satz 8) proved that the Fourier series of a bounded function is φ_2 summable at each point of continuity. More general results follow from Theorem 3 and the known theorems on (C, λ) summabitity of Fourier series.

The φ_λ-transform of the series $\sum_1^\infty \frac{\sin \nu t}{\nu} = \frac{\pi - t}{2}$ $(0 < t < \pi)$ is

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left\{ \sum_1^\infty \frac{\sin \nu t}{\nu} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho} \right)^\nu \right\} d\varrho$$

$$= \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho \sin t}{1 + \varrho - \varrho \cos t} \, d\varrho$$

$$< \frac{\pi}{2} \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \, d\varrho = \frac{\pi}{2},$$

uniformly for $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

It follows that the φ_λ-transform does not present a Gibbs phenomenon for any $\lambda > 0$. In contrast, H. Cramér and T. H. Gronwall have shown the existence of a constant $\lambda_0 = 0.439\ldots$, so that the (C, λ)-means present a Gibbs phenomenon for $\lambda < \lambda_0$, and for no larger λ.

National Bureau of Standards,
and University of Cincinnati.

(Eingegangen am 15. Oktober 1949.)

Über
die Schnittpunkte zweier ebener stetiger Kurven endlicher Länge in allgemeiner Lage.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Georg Nöbeling in Erlangen.

Es sei E die Cartesische Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten x und y. Ist in E eine starr bewegliche Menge M gegeben, so lassen sich alle Lagen von M folgendermaßen durch Parameter festlegen. Mit M denken wir uns einen Vektor fest verbunden. Die Lage von M ist dann eineindeutig festgelegt durch den Anfangspunkt (x, y) und den Richtungswinkel φ des Vektors, also durch das Tripel (x, y, φ), wobei x und y beliebig reell sind und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ gilt. In diesem Sinne sprechen wir kurz von der Lage (x, y, φ) von M, dem Abstand $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2}$ zweier Lagen (x_1, y_1, φ_1) und (x_2, y_2, φ_2), dem Lebesgue-Maß einer Menge von Lagen (= Lebesgue-Maß der Menge der zugehörigen Tripel), einer Nullmenge von Lagen, usw.

Wir behaupten folgenden

Satz 1. *In der Ebene E sei erstens eine (feste) stetige Kurve*[1] *$K_1 = f_1(S_1)$, $S_1 = [0 \leqq s \leqq L_1]$ von endlicher Länge $L_{f_1}(K_1)$ und zweitens eine starr bewegliche stetige Kurve $K_2 = f_2(S_2)$, $S_2 = [0 \leqq s \leqq L_2]$ von endlicher Länge $L_{f_2}(K_2)$ gegeben. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ von Lagen gilt dann für jede Lage von K_2: Der Durchschnitt $K_1 . K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$; für jeden Punkt $p = p^\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ und jedes $j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ derart, daß $f_j(s_j^\mu) = p$ ist; die Kurve $f_j(S_j)$ hat an jeder Stelle s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ eine Tangente $T_j^\mu = T_j(s_j^\mu)$; es gilt $|T_1^1| = \ldots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \ldots = |T_2^{m_2}|$*[2]*.*

Beweis. Wir beginnen mit folgendem

Hilfssatz. Es seien M und N zwei Mengen der Ebene E, deren lineare Carathéodory-Maße $L_C(M)$ und $L_C(N)$ den Bedingungen $L_C(M) = 0$

---

[1]) Eine stetige Kurve ist ein eindeutiges, stetiges Bild $K = f(S)$ einer Strecke S. Die (Durchlaufungs-)Länge $L_f(K)$ dieser Kurve ist wie üblich mittels der Sehnenpolygone definiert.

[2]) Ist T eine gerichtete Gerade, so bezeichnen wir mit $|T|$ die mit T zusammenfallende, ungerichtete Gerade. — Die (gerichtete) Tangente $T_j(s)$ ist definiert als Limes der gerichteten Geraden durch $f_j(s)$ und $f_j(s')$ für $\lim s' = s$.

und $L_C(N) < +\infty$ genügen. M sei fest, N in E starr beweglich. Dann ist die Menge $\mathfrak{N}_0$ aller Lagen von N, bei welchen N zu M nicht fremd ist, eine Nullmenge.

Wir überdecken für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Menge M durch endlich oder abzählbar unendlich viele offene Kreisscheiben $M_1, M_2 \ldots$, deren Durchmesser $d_i = d(M_i)$ der Bedingung $\sum_i d_i < \varepsilon$ genügen [3]). Die Menge N überdecken wir durch endlich oder abzählbar unendlich viele offene Kreisscheiben $N_1, N_2, \ldots$, deren Durchmesser $d_j = d(N_j)$ den Bedingungen $d_j < \varepsilon$ und $\sum_j d_j < 3\, L_C(N)$ genügen [3]). Wir betrachten die Kreisscheiben N_j mit N als starr verbunden. Die Menge $\mathfrak{N}_{ij}$ aller Lagen von N, bei welchen N_j zu M_i nicht fremd ist, hat einen Inhalt $< 2\pi(d_i + d_j)^2$, also die Menge $\mathfrak{N} = \sum \mathfrak{N}_{ij}$ aller Lagen von N, bei welchen $\sum_i M_i$ zu $\sum_j N_j$ nicht fremd ist, ein Maß

$$< 2\pi \sum_{ij} (d_i + d_j)^2 = 2\pi \sum_j d_i^2 + 4\pi \sum_{ij} d_i d_j + 2\pi \sum_j d_j^2$$

$$< 2\pi\varepsilon \sum_i d_i + 4\pi\varepsilon \sum_j d_j + 2\pi\varepsilon \sum_j d_j < 2\pi\varepsilon\,(\varepsilon + 6\, L_C(N) + 3\, L_C(N)).$$

Dieses Maß ist also bei hinreichend kleinem ε beliebig klein. Nun ist $\mathfrak{N}_0$ in $\mathfrak{N}$ enthalten. Also hat $\mathfrak{N}_0$ einen verschwindenden Inhalt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die Darstellung von K_1 als stetige Kurve laute ausführlich geschrieben:

$$x = x_1(s), \quad y = y_1(s); \quad [0 \leqq s \leqq L_1] = S_1; \quad (x, y) = f_1(s);$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sofort annehmen, daß für jedes s aus S_1 die Länge der dem Intervall $[0 \leqq s' \leqq s]$ entsprechenden Teilkurve von K_1 gleich s ist [4]); die Darstellung von K_2 in der Null-Lage (0, 0, 0) laute

$$x = x_2(s), \quad y = y_2(s); \quad [0 \leqq s \leqq L_2] = S_2; \quad (x, y) = f_2(s);$$

auch hier sei für jedes s aus S_2 die Länge der dem Intervall $[0 \leqq s' \leqq s]$ entsprechenden Teilkurve von K_2 gleich s.

Für jedes $j = 1$ und $j = 2$ existieren die Ableitungen $x_j'(s)$ und $y_j'(s)$, sind meßbar, genügen der Bedingung $(x_j'(s))^2 + (y_j'(s))^2 = 1$ und sind proportional zu den Richtungskosinus der Tangente im zugehörigen Punkt der stetigen Kurve $f_j(S_j)$ auf einer maßgleichen Teilmenge $\tilde{S}_j$ des Intervalls S_j [5]). Die Menge $S_j - \tilde{S}_j = R_j$ ist also eine lineare Nullmenge. Da die Abbildung f_j dehnungslos ist, hat die Menge

[3]) Dies ist möglich, da jede Menge mit einem Durchmesser $d < +\infty$ in einer Kreisscheibe mit einem Durchmesser $2d$ enthalten ist.

[4]) M. a. W. wir wählen als Parameter s die Länge in $f_1(S_1)$.

[5]) Vgl. z. B. O. Haupt und G. Aumann, Differential-und Integralrechnung, Berlin 1938, II. Bd., S. 98.

$f_j(R_j) = B_j$ das lineare Carathéodory-Maß $L_C(B_j) = 0$. Für jeden Punkt p von $K_j - B_j$ liegt jedes s mit $f_j(s) = p$ in $\tilde{S}_j$; an der Stelle s existiert also die Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $K_j = f_j(S_j)$.

Für jeden Punkt p aus $K_j - B_j$ besteht die Urbildmenge $f_j^{-1}(p)$ nur aus endlich vielen Punkten s_j^{μ} ($\mu = 1, \ldots, m_j = m_j(p)$). Denn andernfalls enthielte $f_j^{-1}(p)$ einen Häufungswert und in diesem wäre $x_j' = 0 = y_j'$, im Widerspruch zu $x_j'^2 + y_j'^2 = 1$.

Ist p ein Punkt von $K_j - B_j$, so existieren zwar die Tangenten $T_j^1 = T_j(s_j^1), \ldots, T_j^{m_j} = T_j(s_j^{m_j})$; es braucht aber nicht $|T_j^1| = \cdots = |T_j^{m_j}|$ zu sein (falls überhaupt $m_j > 1$ ist). Wir behaupten aber, daß dies nur selten eintritt. Da die (Durchlaufungs)-Länge $L_{f_j}(K_j)$ der Kurve $f_j(S_j)$ endlich ist, gilt dasselbe wegen $L(K_j) \leqq L_{f_j}(K_j)$ [6]) auch für die Länge $L(K_j)$ des Kontinuums $K_j = f_j(S_j)$, die man etwa definieren kann als das lineare Carathéodory-Maß $L_C(K_j)$ von K_j. Daher hat die Menge A_j aller Punkte p von K_j, in denen K_j keine direkte Tangente hat, das lineare Carathéodory-Maß $L_C(A_j) = 0$ [7]); dabei ist (im Unterschied von der (gerichteten) Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $f_j(S_j)$) die Tangente $T_j(p)$ an das Kontinuum K_j folgendermaßen definiert: Die (ungerichtete) Gerade $T = T_j(p)$ durch den Punkt p von K_j heißt direkte Tangente an K_j in p, wenn jede der beiden Halbgeraden $H \subset T$ mit dem Anfangspunkt p, aber keine weitere Halbgerade H mit dem Anfangspunkt p die folgende Eigenschaft hat: Es existiert in K_j eine Folge $\{p_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) von Punkten $p_i \neq p$ derart, daß $\lim p_i = p$ ist und die Folge $\{H_i\}$ der Halbgeraden durch p_i mit dem Anfangspunkt p gegen H konvergiert. Wenn nun $T_j(p)$ existiert und wenn für ein $s \in S_j$ mit $f_j(s) = p$ die Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $f_j(S_j)$ existiert, so gilt $|T_j(s)| = T_j(p)$, wie unmittelbar aus der Definition der Tangenten folgt. Für jeden Punkt p von $K_j - (A_j + B_j)$ ist also $|T_j^1| = \cdots = |T_j^{m_j}|$, wobei T_j^{μ} die Tangente $T_j(s_j^{\mu})$ an $f_j(S_j)$ an der Stelle s_j^{μ} ist ($s_j^1, \ldots, s_j^{m_j}$ die Urbildpunkte von p in S_j).

Es sei $\mathfrak{N}_1$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen $A_1 + B_1$ zu K_2 nicht fremd ist, und $\mathfrak{N}_2$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen $A_2 + B_2$ zu K_1 nicht fremd ist. Da die Mengen A_j und B_j verschwindendes lineares Carathéodory-Maß haben und da wegen $L_C(K_1) \leqq L_{f_1}(K_1)$ und $L_C(K_2) \leqq L_{f_2}(K_2)$ [6]) die Carathéodory-Maße von K_1 und K_2 endlich sind, so sind nach unserem Hilfssatz die Mengen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ Nullmengen. Es sei $\mathfrak{N}_3$ die Nullmenge [8]) aller Lagen von K_2, für welche $K_1 . K_2$ unendlich ist. Für jede Lage von K_2, die nicht in $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3$ enthalten ist, gilt nach der Definition der Mengen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ (bzw. der Mengen A_j und B_j): Der Durchschnitt $K_1 . K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$; für jeden Punkt $p = p^{\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) und jedes

[6]) G. Nöbeling, Jahresber. d. DMV 52, 1942, S. 159.

[7]) G. Nöbeling, diese Zeitschrift erscheint demnächst.

[8]) G. Nöbeling, Hamb. Abh. 15, 1943, S. 120.

$j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ derart, daß $f_j(s_j) = p$ ist; die Kurve $f_j(S_j)$ hat an jeder Stelle s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ eine Tangente $T_j^\mu = T_j(s_j^\mu)$; es gilt $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_j}|$ und $|T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß fast immer auch die Ungleichung $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$ gilt.

Neben dem Cartesischen Raum aller Lagen (x, y, φ) von K_2 betrachten wir den Cartesischen Raum aller Zahlentripel (s_1, s_2, ψ). Es sei Q der Quader $[0 \leqq s_1 \leqq L_1,\ 0 \leqq s_2 \leqq L_2,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi]$ dieses Raumes. Wir definieren folgendermaßen eine Abbildung Φ des Quaders Q auf die Menge $\mathfrak{M}$ aller Lagen (x, y, φ), für welche der Durchschnitt $K_1 . K_2$ nicht leer ist. Es sei (s_1, s_2, ψ) ein Punkt aus Q. Dann sei (x, y, φ) diejenige Lage von K_2, die entsteht, wenn wir K_2 aus der Null-Lage $(0, 0, 0)$ durch eine Parallelverschiebung zunächst in diejenige Lage $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ bringen, bei welcher die den Parameterwerten s_1 und s_2 entsprechenden Punkte $f_1(s_1)$ und $f_2(s_2)$ von K_1 und K_2 in einen Punkt p zusammenfallen, und sodann K_2 um den Punkt p um den Winkel ψ drehen. Diese Abbildung Φ ist dehnungsbeschränkt. Es seien nämlich (s_1, s_2, ψ) und (s_1^*, s_2^*, ψ^*) zwei Punkte aus Q, ihr Abstand heiße d. Die diesen Punkten entsprechenden Lagen von K_2 seien (x, y, φ) und (x^*, y^*, φ^*). Dann ist zunächst $\psi = \varphi$ und $\psi^* = \varphi^*$. Wir gehen nun von der Lage (x, y, φ) der Kurve K_2 aus. Wir drehen K_2 um den Punkt p, in welchem die Punkte $f_1(s_1)$ und $f_2(s_2)$ von K_1 und K_2 zusammenfallen, um den Winkel $\varphi^* - \varphi = \psi^* - \psi$. Die so entstehende Lage $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ von K_2 hat von der Lage (x, y, φ) den Abstand $\sqrt{(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2 + (\bar{y} - \bar{\bar{y}})^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} \leqq \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} + |\varphi - \varphi^*| \leqq L_2 |\varphi - \varphi^*| + |\varphi - \varphi^*| = (L_2 + 1) . |\psi - \psi^*|$; das zweite $\leqq$-Zeichen folgt daraus, daß das Zentrum p der Drehung und der Anfangspunkt (x, y) bzw. $(\bar{x}, \bar{y})$ des Vektors auf K_2 liegen, also einen Abstand $\leqq L_2$ voneinander haben. Nun bringen wir K_2 aus der Lage $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ durch eine Parallelverschiebung in die Lage (x^*, y^*, φ^*), bei welcher die den Parameterwerten s_1^* und s_2^* entsprechenden Punkte von K_1 und K_2 in einen Punkt p^* zusammenfallen. Der Abstand der Lagen $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ und (x^*, y^*, φ^*) ist $\leqq |s_1 - s_1^*| + |s_2 - s_2^*|$, da s_1 bzw. s_2 die Bogenlänge auf K_1 und K_2 bedeuten. Also haben die Lagen (x, y, φ) und (x^*, y^*, φ^*) einen Abstand $\leqq |s_1 - s_1^*| + |s_2 - s_2^*| + (L_2 + 1) . |\psi - \psi^*| \leqq 2(L_2 + 1) . d$. Dies heißt aber, daß die Abbildung Φ dehnungsbeschränkt (mit der Dehnungsschranke $2(L_2 + 1)$) ist, w. z. z. w.

Nun sei $\mathfrak{R}_1$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen ein Punkt $f_1(s_1)$ $(s_1 \in S_1)$ mit einem Punkt $f_2(s_2)$ $(s_2 \in S_2)$ zusammenfällt und außerdem in diesen Punkten die Tangenten $T_1(s_1)$ und $T_2(s_2)$ (bis ev. auf ihre Richtungen) zusammenfallen: $T_1(s_1) = T_2(s_2)$; m. a. W. es soll für jede Lage von K_2 aus $\mathfrak{R}_1$ ein $s_1 \in S_1$ und ein $s_2 \in S_2$ existieren derart, daß erstens

$$x_1(s_1) = x_2(s_2), \qquad y_1(s_1) = y_2(s_2)$$

und zweitens

$$x_1'(s_1) = x_2'(s_2), \qquad y_1'(s_1) = y_2'(s_2)$$

oder

$$-x_1'(s_1) = x_2'(s_2), \qquad -y_1'(s_1) = y_2'(s_2)$$

gilt. Bezeichnet allgemein $\chi(s_1, s_2)$ mit $0 \leqq \chi(s_1, s_2) < 2\pi$, $s_1 \in \tilde{S}_1$, $s_2 \in \tilde{S}_2$ den Winkel, um den man die (gerichtete) Tangente $T_1(s_1)$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn drehen muß, bis sie parallel ist zur (gerichteten) Tangente $T_2(s_2)$, so ist $\mathfrak{N}_4$ das Φ-Bild der Vereinigung der Mengen

$$H_1 = [s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2,\ \psi = \chi(s_1, s_2)]. \quad H_2 = [s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2,\ \psi = \chi(s_1, s_2) + \pi],$$

Nun ist $\chi(s_1, s_2)$ kongruent mod π der Funktion

$$\operatorname{arctg} \frac{y_2'(s_2)}{x_2'(s_2)} - \operatorname{arctg} \frac{y_1'(s_1)}{x_1'(s_1)}.$$

Diese Funktion ist aber meßbar auf der Menge $[s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2]$, da $x_1'(s_1)$, $y_1'(s_1)$, $x_2'(s_2)$, $y_2'(s_2)$ auf $\tilde{S}_1$ bzw. $\tilde{S}_2$ meßbar sind. Also sind H_1 und H_2, also auch $H_1 + H_2$ Nullmengen des (s_1, s_2, ψ)-Raumes. Da die Abbildung Φ dehnungsbeschränkt ist, so ist $\mathfrak{N}_4$ eine Nullmenge.

Dann gilt für jede Lage von K_2 aus der Nullmenge $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4$ neben dem auf S. 640 Gesagten nach der Definition von $\mathfrak{N}_4$ auch $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Nun seien K_1 und K_2 zwei Kontinuen in E mit endlichen Längen $L(K_1)$ und $L(K_2)$; K_2 sei in E starr beweglich. Man kann K_1 und K_3 darstellen als stetige Kurven: $K_1 = f_1(S_1)$ und $K_2 = f_2(S_2)$ mit endlichen (Durchlaufungs-)Längen $L_{f_1}(K_1)$ und $L_{f_2}(K_2)$. Auf diese Kurven wenden wir die Überlegungen des Beweises des Satzes 1 an.

Da nach dem auf S. 639 über die Tangenten $T(p)$ Gesagten in jedem Punkt p von $K_j - (A_j + B_j)$ die Tangente $T_j(p)$ existiert und gleich $T_j(s)$ ist $(p = f_j(s))$, da weiter bei jeder Lage von K_2 aus $\mathfrak{N}$ wegen $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ die Menge $A_1 + B_1$ zu K_2 und die Menge $A_2 + B_2$ zu K_1 fremd ist, so folgt aus dem Satz 1 der

Satz 2. *In der Ebene E sei erstens ein (festes) Kontinuum K_1 von endlicher Länge $L(K_1)$ und zweitens ein starr bewegliches Kontinuum K_2 von endlicher Länge $L(K_2)$ gegeben. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ von Lagen gilt dann für jede Lage von K_2: Der Durchschnitt $K_1 \cdot K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$; für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ existiert in p^ν die direkte Tangente $T_j(p^\nu)$ an K_j $(j = 1, 2)$ und es gilt $T_1(p^\nu) \neq T_2(p^\nu)$.*

(Eingegangen am 22. Oktober 1949.)

Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Eine Matrix A mit nicht negativen Elementen $a_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 2$) heißt nach Frobenius[1]) unzerlegbar, wenn sie weder die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

(mit quadratischen Teilmatrizen A_{11}, A_{22}) hat, noch durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Gestalt gebracht werden kann. Über die Eigenwerte einer solchen Matrix A hat Frobenius[1]), seine an Perron[2]) anknüpfenden Arbeiten über positive Matrizen[3]) fortsetzend, eine Reihe wichtiger Sätze bewiesen. Wir stellen seine wesentlichen Ergebnisse zusammen:

I. *Die charakteristische Gleichung*

$$\Phi(x) \equiv \det(xE - A) = 0 \tag{1}$$

besitzt eine einfache positive Wurzel r, die dem Betrage nach von keiner anderen Wurzel übertroffen wird. Die zu dieser „Maximalwurzel" r gehörige Eigenlösung kann positiv gewählt werden; r ist der einzige Eigenwert, zu dem eine nicht negative Eigenlösung existiert.

II. *Besitzt* (1) *insgesamt k Wurzeln vom Betrage r, so sind diese einfach und haben die Werte $re^{\varkappa 2\pi i/k}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). Die Gesamtheit der n Wurzeln von* (1) *gestattet die Drehung um den Nullpunkt mit dem Winkel $2\pi/k$, aber nicht mit einem kleineren Winkel*[4])*. A hat die Gestalt*

[1]) G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1912**, S. 456—477.

[2]) O. Perron, Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. **64**, S. 248—263 (1907).

[3]) G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1908**, S. 471—476; **1909**, S. 514—518.

[4]) Frobenius hat diese Aussage in anderer Form: Treten in $\Phi(x)$ genau die Potenzen x^n, x^m, x^l, ... wirklich auf, so ist k der größte gemeinsame Teiler von $n - m$, $m - l$, ...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1\,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(mit quadratischen Teilmatrizen in der Diagonale) oder kann durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Form gebracht werden.

Im folgenden werden diese Sätze auf einem neuen, erheblich kürzeren Wege bewiesen und z. T. ergänzt (vgl. Satz III). Wir stützen uns auf eine von Frobenius nicht erwähnte Maximum-Minimum-Eigenschaft der Maximalwurzel r, die mit einem Einschließungssatz von Collatz[5]) zusammenhängt.

Beweis von I. (a) *Definition von r.* Zu jeder Spalte mit nicht negativen Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$ (kurz: zu jedem Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$), die nicht nur Nullen enthält, erklären wir die nicht negative Zahl $r_{\mathfrak{x}}$ durch

$$r_{\mathfrak{x}} = \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}$$

mit der Vereinbarung, den Bruch gleich $+\infty$ zu setzen, falls $x_\mu = 0$ ist. Mit anderen Worten: $r_{\mathfrak{x}}$ ist die größte Zahl, für welche

$$A\mathfrak{x} - r_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} \geqq 0 \tag{3}$$

gilt. Die Zahlen $r_{\mathfrak{x}}$ sind nach oben beschränkt. Denn bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$ die Spalte, deren Elemente sämtlich 1 sind, mit $\mathfrak{s}'$ ihre Transponierte und mit C das größte Element der Zeile $\mathfrak{s}' A$, so ist nach (3)

$$r_{\mathfrak{x}} \leqq \frac{\mathfrak{s}' A\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{s}'\mathfrak{x}} \leqq \frac{C\mathfrak{s}'\mathfrak{x}}{\mathfrak{s}'\mathfrak{x}} = C.$$

Für manche $\mathfrak{x}$ fällt $r_{\mathfrak{x}} > 0$ aus, z. B. für $\mathfrak{x} = \mathfrak{s}$; denn A enthält wegen der Unzerlegbarkeit keine ganz aus Nullen bestehende Zeile. Daher besitzt die Menge aller $r_{\mathfrak{x}}$ eine endliche positive obere Grenze r. Diese wird wirklich erreicht, da man zur Konkurrenz nur die $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $\mathfrak{s}'\mathfrak{x} = 1$ zuzulassen braucht, d. h. eine abgeschlossene beschränkte Menge von Spalten. Es ist also

$$r = \max_{\mathfrak{x} \geqq 0} \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}. \tag{4}$$

(b) Nach Definition von von r gilt: *Es gibt „Extremalvektoren“ $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z} \neq 0$, $\mathfrak{z} \geqq 0$, $A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} \geqq 0$, aber keinen Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} > 0$.*

[5]) L. Collatz, Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen. Math. Zeitschr. 48, S. 221—226 (1942).

Dem Nachweis, daß r die in Satz I erklärte Maximalwurzel ist und daß die Extremalvektoren die zugehörigen Eigenvektoren sind, schicken wir die folgende Bemerkung voraus.

(c) *Ist* $\mathfrak{y} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \neq 0$, *so ist* $(E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$. Zum Beweis setzen wir $(E+A)^{\nu}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_{\nu}$. Dann ist $\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} \geqq \mathfrak{y}_{\nu} \geqq 0$. In $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ verschwinden also höchstens diejenigen Elemente, die auch in $\mathfrak{y}_{\nu}$ verschwinden. Es kann aber nicht eintreten, daß in $\mathfrak{y}_{\nu}$ und $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ genau die gleichen Elemente verschwinden; denn dann wäre bei passender Anordnung der Elemente

$$\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathfrak{p} > 0,$$

$$\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus würde $A_{21}\mathfrak{p} = 0$ folgen, daher $A_{21} = 0$, entgegen der Voraussetzung der Unzerlegbarkeit von A. Wenn also $\mathfrak{y}_{\nu}$ überhaupt Nullen enthält, enthält $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ weniger; nun enthält aber $\mathfrak{y}_{n} = \mathfrak{y}$ höchstens $n-1$ Nullen, also enthält $\mathfrak{y}_{n-1}$ keine.

(d) *Jeder Extremalvektor* $\mathfrak{z}$ *ist Eigenvektor von* A *zum Eigenwert* r *und ist positiv.* Nach Definition ist

$$\mathfrak{z} \geqq 0, \quad A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0.$$

Wäre hierin $\mathfrak{y} \neq 0$, so würden wir durch Multiplikation mit $(E+A)^{n-1}$ für die Spalte $\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{z}$ die Ungleichungen

$$\mathfrak{x} > 0, \qquad A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$$

erhalten, im Widerspruch zu (b). Wir haben also $\mathfrak{y} = 0$, $A\mathfrak{z} = r\mathfrak{z}$. Daß $\mathfrak{z} > 0$ ist, folgt aus $0 < \mathfrak{x} = (1+r)^{n-1}\mathfrak{z}$.

(e) *Ist* α *ein beliebiger Eigenwert von* A, *so ist* $\alpha \leqq r$. Zur Abkürzung bezeichnen wir hier und im folgenden zu jeder Matrix $(m_{\varrho\sigma}) = M$ die Matrix der absoluten Beträge $(|m_{\varrho\sigma}|) = M^*$. Dann folgt aus $\alpha\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}$ nach der Dreiecksungleichung

$$|\alpha|\,\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^*, \qquad |\alpha| \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r.$$

Hiernach ist r die in Satz I erklärte Maximalwurzel von A.

(f) *Gibt es zu dem Eigenwert* α *von* A *einen nicht negativen Eigenvektor* $\mathfrak{x}$, *so ist* $\alpha = r$. Mit A ist auch die transponierte Matrix A' nicht negativ und unzerlegbar; ihre Maximalwurzel ist ebenfalls r, da A und A' die gleichen Eigenwerte haben. Für einen Extremalvektor $\mathfrak{y}$ von A' gilt daher

$$\alpha\mathfrak{y}'\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'(A\mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}'A)\mathfrak{x} = r\mathfrak{y}'\mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt $\alpha = r$, da $\mathfrak{y} > 0$, also $\mathfrak{y}'\mathfrak{x} \neq 0$ ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß r einfache Nullstelle von $\Phi(x)$ ist. Wir beweisen zunächst etwas weniger:

(g) *A besitzt zum Eigenwert r nur einen linear unabhängigen Eigenvektor: dessen Komponenten haben alle dasselbe Vorzeichen.* Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Eigenvektor von A zu r, $\mathfrak{z}$ ein fest gewählter Extremalvektor. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ proportional sind. Wir bestimmen die Zahl c so, daß $\mathfrak{x} - c\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0$ ist und eine Komponente von $\mathfrak{y}$ verschwindet. Wegen der letzten Eigenschaft kann $\mathfrak{y}$ nach (d) kein Extremalvektor sein; andererseits ist $A\mathfrak{y} = r\mathfrak{y}$, daher wäre $\mathfrak{y}$ doch Extremalvektor, wenn nicht $\mathfrak{y} = 0$ wäre. Es ist also $\mathfrak{x} = c\mathfrak{z}$.

(h) *r ist einfache Nullstelle von $\Phi(x)$.* Die Behauptung besagt: $\Phi'(r) \neq 0$. Nach der bekannten Regel über die Differentation einer Determinante ist $\Phi'(r)$ die Spur der zu $rE - A$ adjungierten Matrix P. Zunächst folgt aus (g), daß Rang $(rE - A) = n - 1$, also $P \neq 0$ ist. Ferner genügt P der Gleichung $(rE - A)P = 0$. Nach dieser ist jede nicht verschwindende Spalte von P Eigenlösung von A zu r, enthält also nach (g) nur Elemente einerlei Vorzeichens. Dasselbe gilt für die Zeilen von P, wie man durch Übergang zur Transponierten erkennt. Also haben alle Elemente von P dasselbe Vorzeichen, und es ist $\Phi'(r) = \text{Spur } P \neq 0$. (Da r die größte reelle Nullstelle von $\Phi(x)$ ist, ist $\Phi'(r)$ und damit jedes Element von P *positiv*).

Damit ist der Beweis von Satz I beendet. Den Beweis von Satz II stützen wir auf einen teilweise neuen Satz III (bei Frobenius[3]) S. 516 fehlt die für das Folgende wesentliche Diskussion des Falles $|\beta| = r$).

III. *Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine unzerlegbare Matrix mit nicht negativen Elementen, $B = (b_{\mu\nu})$ eine Matrix mit komplexen Elementen $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$. Es sei $b_{\mu\nu} \leqq a_{\mu\nu}$ für alle μ, ν. Ist r die Maximalwurzel von A und β ein beliebiger Eigenwert von B, so ist $|\beta| \leqq r$. Gilt das Gleichheitszeichen, ist also $\beta = re^{i\varphi}$, so hat B die Gestalt*

$$B = e^{i\varphi} \cdot DAD^{-1} \tag{5}$$

mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente sämtlich den absoluten Betrag 1 haben; insbesondere ist dann stets $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$. (Daß umgekehrt jede Matrix B der Gestalt (5) den Eigenwert $re^{i\varphi}$ besitzt, ist klar.)

Beweis von III[6]). Aus

$$\beta\mathfrak{x} = B\mathfrak{x} \tag{6}$$

folgt wie unter I e

$$|\beta|\mathfrak{x}^* \leqq B^*\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^* \tag{7}$$

und hieraus $|\beta| \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r$. Liegt der Grenzfall $|\beta| = r$ vor, so ist $\mathfrak{x}^*$ nach (7) ein Extremalvektor, also haben wir nach I d

[6]) Eine ähnliche Schlußweise findet sich in einem Sonderfall bei V. Romanovsky, Sur les zéros des matrices stocastiques., Comptes rend. Acad. Sci., Paris **192** 266—269 (1931).

$$|\beta|\,\mathfrak{x}^* = A\,\mathfrak{x}^*, \quad \mathfrak{x}^* > 0 \tag{8}$$

und daher nach (7)

$$B^* = A, \quad |b_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Nach Definition von $\mathfrak{x}^*$ ist $\mathfrak{x} = D\,\mathfrak{x}^*$ mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente den Betrag 1 haben. Führen wir dies samt $\beta = r\,e^{i\varphi}$ in (6) ein, so ergibt sich

$$|\beta|\,\mathfrak{x}^* = C\,\mathfrak{x}^* \tag{10}$$

mit

$$C = e^{-i\varphi}\,D^{-1}\,B\,D, \quad C^* = B^* = A. \tag{11}$$

Aus (8), (10) und (11) folgt $C\,\mathfrak{x}^* = C\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^*$, also wegen $\mathfrak{x}^* > 0$:

$$C = C^*, \quad C = A, \quad B = e^{i\varphi}\,DAD^{-1}.$$

Beweis von II. (a) *Die Lage der Eigenwerte vom maximalen Betrag.* Es gebe genau k Wurzeln von (1), welche den größten möglichen Betrag r haben, etwa

$$\alpha_\varkappa = r\,e^{i\varphi_\varkappa} \qquad (0 = \varphi_1 < \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_k < 2\pi). \tag{12}$$

Die Voraussetzungen von III werden von $B = A$ zusammen mit $\beta = \alpha_\varkappa$ erfüllt; daher gibt es eine Diagonalmatrix $D_\varkappa$ mit

$$A = e^{i\varphi_\varkappa} D_\varkappa\,A\,D_\varkappa^{-1}. \tag{13}$$

Nach I ist r einfacher Eigenwert von A, also $r\,e^{i\varphi_\varkappa}$ einfacher Eigenwert der rechts stehenden Matrix, d. h. von A. Die $\varphi_\varkappa$ sind also alle voneinander verschieden. Wir zeigen, daß sie mod 2π eine additive Gruppe bilden, indem wir (13) mit $D_\lambda^{\pm 1}$ transformieren. Es ergibt sich

$$A = e^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)}\,TAT^{-1} \qquad (T = D_\varkappa D_\lambda^{\pm 1}).$$

Hiernach ist auch $r\,e^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)}$ ein Eigenwert von A, also unter den Zahlen (12) enthalten. Aus der hiermit bewiesenen Gruppeneigenschaft folgt

$$\varphi_\varkappa = (\varkappa - 1)\,\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

(b) *Die Drehinvarianz des Spektrums* folgt unmittelbar aus (13) und (14). Die Gesamtheit der Wurzeln von (1) gestattet genau die Drehgruppe des regelmäßigen k-Ecks.

(c) Um A auf die angekündigte Form (2) zu bringen (was nur für $k > 1$ notwendig ist), stellen wir die Zeilen und genau so die Spalten von A derart um, daß die Komponenten eines zu $\alpha_2 = r\,e^{2\pi i/k}$ gehörenden Eigenvektors nach ihren Argumenten geordnet erscheinen. Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit D_2 in der Form

$$D_2 = \begin{pmatrix} E_1\,e^{i\delta_1} & & & \\ & E_2\,e^{i\delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_g\,e^{i\delta_g} \end{pmatrix} \qquad (g \geqq 1)$$

an, wobei die $\delta_\gamma \bmod 2\pi$ voneinander verschieden sind und die E_γ Einheitsmatrizen (nicht notwendig vom selben Grade) bedeuten. Führen wir die entsprechende Zerlegung von A in g^2 Teilmatrizen $A_{\gamma\varrho}$ in die für $\varkappa = 2$ angeschriebene Gleichung (13) ein, so ergibt sich

$$A_{\gamma\varrho} = e^{i(2\pi/k + \delta_\gamma - \delta_\varrho)} A_{\gamma\varrho} \qquad (1 \leqq \gamma, \varrho \leqq g),$$

also

$$A_{\gamma\varrho} = 0, \text{ wenn } 2\pi/k + \delta_\gamma \not\equiv \delta_\varrho \bmod 2\pi. \tag{15}$$

Hiernach gibt es zu jedem γ höchstens ein ϱ (und zu jedem ϱ höchstens ein γ), für welches $A_{\gamma\varrho} \neq 0$ ist; andererseits gibt es wegen der Unzerlegbarkeit von A mindestens eins; also gibt es genau eins, und es ist $\delta_\varrho \equiv 2\pi/k + \delta_\gamma$. Insbesondere kommen unter den δ_γ die k Werte $\varkappa 2\pi/k + \delta_1$ vor. Wir denken uns die Anordnung so gewählt, daß sie an den ersten k Stellen stehen. Dann ist

$$\delta_\varkappa = \delta_1 + (\varkappa - 1)\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots k),$$

und A hat nach (15) die Gestalt

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{k-1k} & 0 \\ A_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B \end{Vmatrix}.$$

Hierin können aber nicht mehr als die ersten k Zeilen und Spalten auftreten, da A unzerlegbar vorausgesetzt ist. Damit ist Satz II bewiesen.

Wir schließen mit zwei ergänzenden Bemerkungen. Die erste betrifft den wichtigen Fall $k = 1$, in welchem r der einzige Eigenwert vom maximalen Betrage ist (die nicht negative unzerlegbare Matrix A heißt in diesem Fall nach Frobenius primitiv). Er tritt, wie schon Perron [2]) bemerkt hat, sicher dann ein, wenn eine Potenz $A^m > 0$ ist; man erkennt nämlich aus der Darstellung (2), daß im Falle $k > 1$ jede Potenz von A Nullen enthält. Von diesem Satz hat Frobenius [1]), S. 463, die folgende Umkehrung bewiesen: Ist A primitiv, so ist von einem ersten Exponenten p an jede Potenz von A positiv:

$$A^m > 0 \text{ für } m \geqq p.$$

Über diese Zahl p macht Frobenius keine näheren Angaben, doch kann man aus seinen Erörterungen die Abschätzung $p \leqq 2n^2 - 2n$ erhalten, wobei n die Zeilenzahl von A bedeutet. Eine eingehendere Untersuchung ergibt, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll, die

bestmögliche nur von n abhängige Schranke $p \leqq n^2 - 2n + 2$. Das Gleichheitszeichen steht z. B. für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Bemerkung geht dahin, daß die Maximalwurzel r außer der Maximum-Minimum-Eigenschaft (4) auch eine Minimum-Maximum-Eigenschaft besitzt, nämlich

$$r = \min_{x>0} \max_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}. \tag{16}$$

Sie läuft auf die rechte Seite der Collatz'schen Ungleichung

$$\min \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \leqq r \leqq \max \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \qquad (x_\nu > 0) \tag{17}$$

hinaus, wie (4) auf die linke. (Collatz[5]) beweist (17) nur für $A > 0$, doch gilt der einfache Beweis, der ähnlich wie I f verläuft, auch für unzerlegbare $A \geqq 0$.) Die Symmetrie von (4) und (16) legt den Gedanken nahe, daß man auch (16) zur Grundlage der ganzen Theorie hätte machen können, wie dies hier mit (4) geschehen ist. In der Tat kann man ein Stück weit ganz entsprechend vorgehen. Jedoch wird die zu dem Nachweis, daß r ein größter Eigenwert ist, verwendete einfache Schlußweise von I e unbrauchbar, weil die von der Dreiecksungleichung gelieferte Abschätzung jetzt in der falschen Richtung liegt.

(Eingegangen am 2. 11. 1949.)

Über Landau's Beweis des Primzahlsatzes.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

B. L. van der Waerden in Laren N-H.

In seinem Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, § 65 hat E. Landau die Formel

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(x\, e^{-\sqrt[\gamma]{\ln x}}) \tag{1}$$

für $\gamma > 10$ bewiesen. Er bemerkt dazu, daß mit derselben Beweismethode der Wurzelexponent γ zu 8, aber nicht zu 7 reduziert werden kann. Im Beweis wird ein Cosinuspolynom benutzt:

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi, \tag{2}$$

das nur den folgenden Bedingungen genügen muß:

$$g(\varphi) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi \tag{3}$$

$$a_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$a_0 < a_1. \tag{5}$$

Um einen möglichst kleinen Wert von γ zu erhalten, muß man $g(\varphi)$ so wählen, daß der Quotient

$$\frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_1 - a_0} = u \tag{6}$$

möglichst klein wird. Landau's Beweis ergibt nämlich bei beliebiger Wahl von $g(\varphi)$ die Gültigkeit von (1) für alle $\gamma > u + 2$. Anders ausgedrückt: Ist U die untere Grenze aller Quotienten u für alle Polynome $g(\varphi)$, so gilt (1) für alle $\gamma > U + 2$.

Beschränkt man sich auf Polynome $g(\varphi)$ vom Grade 2, so wird das Minimum $u = P_2 = 7$ nach Landau[1]) geliefert durch

$$g(\varphi) = (3 + 4\cos\varphi)^2 = 17 + 24\cos\varphi + 8\cos 2\varphi.$$

Denn für jedes Polynom 2. Grades

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi,$$

[1]) E. Landau, Annali R. Scuola Normale Pisa (Fis.-Mat.) Serie 2, Vol. 2 (1933) p. 200.

das auch nur der Bedingung (3) genügt, gilt

$$8a_0 - 6a_1 + a_2 = 8g(\arccos -\tfrac{3}{4}) \geqq 0,$$

also

$$7(a_0 - a_1) + a_0 + a_1 + a_2 \geqq 0$$

oder

$$a_0 + a_1 + a_2 \geqq 7(a_0 - a_1). \tag{7}$$

Mit derselben Methode beweist LANDAU [1]) noch, daß bei Beschränkung auf Polynome vom Grade 3, 4 oder 5 das Minimum $P_3 = P_4 = P_5 = 6$ geliefert wird durch das Polynom 3. Grades

$$g(\varphi) = (1 + 2\cos\varphi)^2(1 + \cos\varphi) = 5 + 8\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + \cos 3\varphi.$$

Denn für jedes Polynom (2) mit $n = 5$, das Bedingung (3) erfüllt, gilt

$$7a_0 - 5a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3g(\pi) + g\left(\frac{2\pi}{3}\right) \geqq 0,$$

also

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqq 6(a_1 - a_0). \tag{8}$$

Für Polynome der Grade 6, 7, 8, 9 hat L. TSCHAKALOFF [2]) mit einer Verfeinerung derselben Methode die Minima von u bestimmt:

$$P_6 = 5{,}9298\ldots, \qquad P_7 = P_8 = P_9 = 5{,}90529\ldots.$$

Uns interessiert hier die untere Grenze U aller u, ohne Beschränkung der Gradzahl n:

$$U = \lim P_n = \text{fin inf } u. \tag{9}$$

Nach LANDAU, Handbuch § 65, ist jedenfalls $U \geqq 5$. Denn aus

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\varphi)(3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi)\, d\varphi \geqq 0$$

folgt unmittelbar

$$6a_0 - 4a_1 + a_2 \geqq 0$$

oder

$$a_0 + a_1 + a_2 \geqq 5(a_1 - a_0),$$

also, da $g(0) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist,

$$g(0) \geqq 5(a_1 - a_0). \tag{10}$$

In analoger Weise beweist LANDAU sogar $U > 5{,}224$, indem er von

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} g(\varphi)(2\cos\varphi - 1) \geqq 0 \tag{11}$$

[2]) L. TSCHAKALOFF, Annali R. Scuola Normale Pisa, Serie 2, Vol. 9 (1940) p. 13. Schon früher hatte I. SCHUR $P_6 < 6$ bewiesen.

und

$$g(\pi) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \geqq 0 \tag{12}$$

ausgeht.

Mit derselben Methode soll nun gezeigt werden:

$$U > 5{,}864. \tag{13}$$

Wir gehen von der Ungleichung

$$\int_{\alpha}^{\pi} g(\varphi)\, d\varphi \geqq 0 \tag{14}$$

aus und wählen α etwas größer als $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Setzt man (2) in (14) ein und führt die Integration aus, so erhält man

$$(\pi - \alpha)\, a_0 - \sum_1^n \frac{\sin k\alpha}{k}\, a_k \geqq 0. \tag{15}$$

Multipliziert man (15) mit p und (12) mit q und addiert, wobei p und q beliebige positive Zahlen sind, so erhält man eine Ungleichung der Form

$$b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \geqq 0 \tag{16}$$

mit

$$\begin{aligned}
b_0 &= p(\pi - \alpha) + q = p\left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + q \\
b_1 &= -p \sin\alpha - q = -p\cos\varepsilon - q \\
b_2 &= -\tfrac{1}{2} p \sin 2\alpha + q = \tfrac{1}{2} p \sin 2\varepsilon + q \\
b_3 &= -\tfrac{1}{3} p \sin 3\alpha - q = \tfrac{1}{3} p \cos 3\varepsilon - q \\
b_4 &= -\tfrac{1}{4} p \sin 4\alpha - q = -\tfrac{1}{4} p \sin 4\varepsilon + q \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zu (16) addieren wir noch

$$g(0) = \sum_0^n a_k$$

und erhalten

$$g(0) + \sum_0^n (b_k - 1)\, a_k \geqq 0. \tag{17}$$

Wenn wir nun p und q so wählen, daß für $k \geqq 2$ alle Koeffizienten $(b_k - 1)$ negativ oder Null sind, so können wir wegen (4) alle negativen Glieder in (17) weglassen und erhalten

$$g(0) + (b_0 - 1)\, a_0 + (b_1 - 1)\, a_1 \geqq 0. \tag{18}$$

Wenn wir nun auch noch dafür sorgen, daß die Summe der beiden Koeffizienten $(b_0 - 1)$ und $(b_1 - 1)$ negativ oder Null ist:

$$b_0 + b_1 - 2 \leqq 0, \tag{19}$$

so können wir in (18) den Koeffizienten $b_0 - 1$ durch den mindestens ebenso großen $1 - b_1$ ersetzen und finden

$$g(0) + (1 - b_1)\, a_0 + (b_1 - 1)\, a_1 \geqq 0$$

$$g(0) \geqq (1 - b_1)(a_1 - a_0). \tag{20}$$

Aus (20) folgt dann, daß $(1 - b_1)$ eine untere Schranke für alle Quotienten (6) ist, woraus ohne weiteres

$$U \geqq 1 - b_1$$

folgt.

Es handelt sich also nur noch darum, p und q so zu wählen, daß $(1 - b_1)$ möglichst groß ausfällt.

Die Bedingungen, die p und q zu erfüllen haben, lauteten:

$$b_0 + b_1 \leqq 2$$

$$b_k \leqq 1 \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Setzt man für die b_k ihre Werte ein, so bedeutet das

$$p\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \cos\varepsilon\right) \leqq 2 \tag{21}$$

$$\tfrac{1}{2}\, p \sin 2\varepsilon + q \leqq 1 \tag{22}$$

$$\tfrac{1}{3}\, p \cos 3\varepsilon - q \leqq 1 \tag{23}$$

$$-\tfrac{1}{4}\, p \sin 4\varepsilon + q \leqq 1 \tag{24}$$

$$-\tfrac{1}{5}\, p \cos 5\varepsilon - q \leqq 1 \tag{25}$$

$$\tfrac{1}{6}\, p \cos 6\varepsilon + q \leqq 1 \tag{26}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir wollen es so einrichten, daß in (21), (22) und (23) das Gleichheitszeichen steht. Addition von (22) und (23) und Vergleich mit (21) ergibt dann

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \cos\varepsilon = \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon + \frac{1}{3}\cos 3\varepsilon$$

oder

$$\varepsilon + \cos\varepsilon + \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon + \frac{1}{3}\cos 3\varepsilon = \frac{\pi}{2}. \tag{A}$$

Diese transzendente Gleichung hat eine kleinste Wurzel $\varepsilon = 0{,}1386\ldots$ Die zugehörigen Werte von p und q sind

$$p = 4{,}527\ldots$$

$$q = 0{,}380\ldots.$$

Die Ungleichungen (21), (22), (23) sind nun also mit dem Zeichen $=$ erfüllt. (24) und (25) sind erfüllt, weil der erste Term links negativ und der zweite < 1 ist. Ungleichung (26) ist auch erfüllt, wie man durch Ausrechnen oder grobes Schätzen bestätigt. Die nächstfolgende Ungleichung ist erfüllt, weil das Glied $-q$ das Minuszeichen hat. In allen weiteren Ungleichungen hat das erste Glied höchstens den Betrag $\frac{1}{8}p < 0{,}6$, das zweite den Betrag $q < 0{,}4$, die Summe ist also sicher < 1. Somit sind alle Bedingungen erfüllt, und die Schranke für U wird

$$1 - b_1 = 1 + p\cos\varepsilon + q > 5{,}8642.$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit dem von Tschakaloff, so ergibt sich:

Die untere Grenze U aller Quotienten (6) *liegt zwischen* 5,8642 *und* 5,9053.

Unsere recht grobe Methode ließe sich mit der nötigen Geduld vermutlich noch verfeinern. Die wahre Grenze wird sicher ganz nahe bei 5,9 liegen.

(Eingegangen am 7. Dezember 1949.)

Landolt-Börnstein

Zahlenwerte und Funktionen

aus

Physik · Chemie · Astronomie · Geophysik · Technik

Sechste Auflage

der „Physikalisch-Chemischen Tabellen"

In Gemeinschaft mit

J. Bartels · P. ten Bruggencate · K. H. Hellwege · E. Schmidt

und unter vorbereitender Mitwirkung von

J. D'Ans · G. Joos · W. A. Roth

Herausgegeben von

Arnold Eucken

In vier Bänden

(Erster Band in vier Teilen)

Im April 1950 wird erscheinen:

I. Band: Atom- und Molekularphysik

1. Teil: Atome und Ionen

Bearbeitet von

E. v. Angerer, L. Biermann, U. Cappeller, E. Döring, E. U. Franck, R. Glocker, W. Hanle, G. Joos, F. Kirchner, W. Klemm, A. Saur, E. Saur, U. Stille, H. Stuart, E. Wicke

Vorbereitet von **Georg Joos**

Herausgegeben von **Arnold Eucken** in Gemeinschaft mit **K. H. Hellwege**

Etwa 450 Seiten.

In Moleskin gebunden DMark 126.—

Die jetzt erscheinende 6. Auflage bedurfte im Hinblick auf die anschwellende Originalliteratur und mit Rücksicht auf die stetig steigenden Anforderungen, die an ein derartiges Werk gestellt werden, einer durchgreifenden Neugestaltung, was u. a. auch unmittelbar durch die Titeländerung zum Ausdruck kommt. Neu geschaffen wurde beispielsweise ein besonderer Band, der die wichtigsten astronomischen und geophysikalischen Zahlenwerte und Funktionen enthält, sowie ein solcher, der speziell den Bedürfnissen der praktisch tätigen Physiker, Chemiker und Ingenieure gerecht wird.

Die weiteren Bände werden folgende Gebiete behandeln:

I. Band: 2. Teil: **Molekeln, Molekel-Ionen und Radikale**
3. Teil: **Kristalle**
4. Teil: **Atomkerne**
II. Band: **Makrophysik und Chemie**
III. Band: **Astronomie und Geophysik**
IV. Band: **Technik**

Jeder Band und Bandteil ist einzeln käuflich.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F. K. Schmidt · B. L. van der Waerden

BAND II: **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.** Von Dr. Konrad Knopp, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Vierte Auflage. Mit 14 Textfiguren. XII, 583 Seiten. 1947. DMark 39.60

BAND IV: **Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.** Von Dr. Erwin Madelung, ord. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 29 Abbildungen. XX, 531 Seiten. 1950. DMark 47.—; Ganzleinen DMark 49.70

BAND XXVII: **Grundzüge der theoretischen Logik.** Von D. Hilbert† und W. Ackermann. Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949. DMark 16.50; Ganzleinen DMark 19.80

BAND XLI: **Vorlesungen über die Theorie der Polyeder** unter Einschluß der Elemente der Topologie. Von Ernst Steinitz. Aus dem Nachlaß herausgegeben und ergänzt von Hans Rademacher. Mit 190 Abbildungen. VIII, 351 Seiten. 1934. DMark 27.—

BAND XLIX: **Geometrie der Gewebe.** Topologische Fragen der Differentialgeometrie. Von Dr. Wilhelm Blaschke und Dr. Gerrit Bol. Mit 137 Figuren. VIII, 339 Seiten. 1938. DMark 28.50; Ganzleinen DMark 29.70

BAND LII: **Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik.** Von Dr. Wilhelm Magnus, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und Dr. Fritz Oberhettinger, Dozent der Mathematik an der Universität Mainz. Zweite Auflage. VIII, 230 Seiten. 1948. DMark 24.60

BAND LIII: **Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen.**

1. Teil: Elementare Quantenmechanik. Von Dr. Siegfried Flügge, ord. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. Hans Marschall, Marburg. Mit 18 Abbildungen. X, 240 Seiten. 1947. DMark 18.—

BAND LV: **Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik.** Von Dr. Fritz Oberhettinger, Dozent der Mathematik an der Universität Mainz, und Dr. Wilhelm Magnus, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 54 Textabbildungen. VII, 126 Seiten. 1949. DMark 15.60; Ganzleinen DMark 18.30

BAND LVI: **Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.** Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Von O. Toeplitz. Band I. Aus dem Nachlaß herausgegeben von Dr. G. Köthe, Prof. der Mathematik an der Universität Mainz. Mit 148 Textabbildungen. IX, 181 Seiten. 1949 DMark 19.60; Ganzleinen DMark 22.60

BAND LVII: **Theoretische Mechanik.** Von Dr. Georg Hamel, ord. Professor an der Technischen Universität Berlin. Mit 161 Abbildungen. XVI, 796 Seiten. 1949. DMark 63.—; Ganzleinen DMark 66.—

BAND LVIII: **Einführung in die Differentialgeometrie.** Von Dr. Wilhelm Blaschke. Mit 57 Abbildungen. VII, 146 Seiten. 1950. DMark 16.—; Ganzleinen DMark 18.60

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.